Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 — 1970

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 530.12:531.21

Н. М. БОЧАРОВА, К. А. БРОННИКОВ, В. Н. МЕЛЬНИКОВ

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА И БЕЗМАССОВОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим центрально-симметричную статическую самосогласованную задачу взаимодействия скалярного и гравитационного полей. Для скалярного поля, в отличие, например, от [1 и 2], используем уравнение

$$\left(\square + m^2 + \frac{R}{6}\right)\varphi = 0, \tag{1}$$

где $\square = \nabla^\alpha\nabla_\alpha$ — общековариантный оператор д'Аламбера, R — скалярная кривизна. Оно коноформно инвариантно при $m=0$, допускает правильный квазиклассический переход и т. д. [3 — 5].

Ограничимся безмассовым скалярным полем. Лагранжиану

$$\mathcal{L} = \frac{R}{2\varkappa} + \nabla^\alpha\overset{*}{\varphi}\nabla_\alpha\varphi - \frac{R}{6}\overset{*}{\varphi}\varphi \tag{2}$$

соответствуют уравнения поля

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = -\varkappa T_\mu^\nu, \quad (3) \qquad \left(\square + \frac{R}{6}\right)\varphi = 0, \tag{4}$$

где тензор энергии-импульса скалярного поля

$$T_\mu^\nu = \nabla_\mu\overset{*}{\varphi}\nabla^\nu\varphi - \nabla^\nu\overset{*}{\varphi}\nabla_\mu\varphi - \delta_\mu^\nu\left(\nabla^\alpha\overset{*}{\varphi}\nabla_\alpha\varphi - \frac{R}{6}\overset{*}{\varphi}\varphi\right) - \frac{1}{3}\left(R_\mu^\nu + \nabla^\nu\nabla_\mu - \delta_\mu^\nu\square\right)\overset{*}{\varphi}\varphi, \tag{5}$$

обладает свойствами

$$T = T_\alpha^\alpha = 0, \quad T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \quad \nabla_\alpha T_\mu^\alpha = 0. \tag{6}$$

Обозначения те же, что в работах [4] и [5]. Согласно (6) и (3)

$$R = 0. \tag{7}$$

В предположении сферической симметрии и статичности

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi_1^2),$$
$$\varphi = \varphi(r) \tag{8}$$

в системе (3) и (4) независимы лишь три уравнения, которые можно записать в виде (штрих означает d/dr):

$$\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}-\frac{e^\lambda}{r^2}=\frac{\varkappa}{3}\left[\overset{*}{\varphi}'\varphi'+\frac{\nu'}{2}(\overset{*}{\varphi}\varphi)'\right]\left(1-\frac{\varkappa}{3}\overset{*}{\varphi}\varphi\right)^{-1}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}-\frac{e^\lambda}{r^2}=\varkappa\left[\overset{*}{\varphi}'\varphi'+\frac{1}{6}\left(\frac{4}{r}+\nu'\right)(\overset{*}{\varphi}\varphi)'\right]\left(1-\frac{\varkappa}{3}\overset{*}{\varphi}\varphi\right)^{-1}, \tag{10}$$

$$\varphi''+\left(\frac{2}{r}+\frac{\nu'-\lambda'}{2}\right)\varphi'=0. \tag{11}$$

Уравнение (11) один раз легко интегрируется:

$$\varphi' r^2 e^{(\nu-\lambda)/2}=c_1. \tag{12}$$

В частности, если $c_1=0$, то $\varphi=\mathrm{const}$, причем при $|\varphi|=\sqrt{\frac{3}{\varkappa}}$ на метрику, согласно системе (9—11), наложено единственное условие $R=0$; при $|\varphi|\neq\sqrt{\frac{3}{\varkappa}}$ решением является метрика Шварцшильда, для которой

$$\nu'+\lambda'=0. \tag{13}$$

Попытаемся найти решение, удовлетворяющее (13) при $c_1\neq 0$. В этом случае уравнение (7) принимает вид

$$\lambda''-\lambda'^2+\frac{4\lambda'}{r}+\frac{2}{r^2}(e^\lambda-1)=0 \tag{14}$$

и подстановкой $z=e^{-\lambda}$ интегрируется. Далее, учитывая граничное условие евклидовости на бесконечности

$$\lambda\to 0,\quad \lambda\to 0 \text{ и } \varphi\to 0 \quad \text{при } r\to\infty, \tag{15}$$

получаем решение системы (9 — 11):

$$e^\nu=e^{-\lambda}=\left(1-\frac{a}{r}\right)^2,\quad \varphi=-\frac{c_1}{r-a},\quad |c_1|^2=\frac{3a^2}{\varkappa}. \tag{16}$$

Н. Зайцевым и другими рассмотрено взаимодействие метрического и скалярного полей в различных вариантах теории тяготения, найден интеграл уравнений (9—11) без предположения (13). Он имеет вид

$$e^{\bar\lambda}=1-cy-c_2y^2, \tag{17}$$

$$e^{\bar\lambda}=\frac{1}{x^2}(y^{-2}-cy^{-1}-c_2), \tag{18}$$

$$x^2=x_0^2\left|\frac{1-cy-c_2y^2}{y^2}\right|\left|\frac{2c_2y+c-2D}{2c_2y+c+2D}\right|^{c/2D}, \tag{19}$$

где y — независимый параметр, $c_2=\varkappa|c_1|^2>0$; $2D=\sqrt{c^2+4c_2}$, $x=r\sqrt{A}$,

$$A=1-\frac{\varkappa}{3}\overset{*}{\varphi}\varphi,\quad e^{\bar\nu}=e^\nu A,\quad e^{\bar\lambda}=e^\lambda\left[1+\frac{\varkappa}{6A}x\frac{d}{dx}(\overset{*}{\varphi}\varphi)\right]^2, \tag{20}$$

а x_0, c — константы интегрирования.

Интегрируя уравнение (12) и используя (20) и граничное условие (15), представим решение в следующем удобном виде:

$$r(\xi)=\frac{D}{1-\xi}\,\xi^{1/2(1-\gamma-\beta)}(1+\xi^\beta),$$

$$e^{\nu(\xi)} = \frac{1}{4}\,\xi^{\gamma-\beta}(1+\xi^{\beta})^2,$$

$$e^{\lambda(\xi)} = 4\xi\left[1-\gamma+(1+\gamma)\,\xi-\beta(1-\xi)\,\frac{1-\xi^{\beta}}{1+\xi^{\beta}}\right]^{-2}, \qquad (21)$$

$$\varphi(\xi) = \sqrt{\frac{3}{\varkappa}}\,\frac{1-\xi^{\beta}}{1+\xi^{\beta}}\,\frac{c_1}{|c_1|},$$

где

$$\gamma = -\frac{c}{2D}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{3}}, \quad \xi = \left|\frac{y_2}{y_1}\right|\frac{y_1-y}{y-y_2},$$

$y_1 > 0$ и $y_2 < 0$ — корни трехчлена $1-cy-c_2y^2$. Независимый параметр ξ и константы интегрирования γ и D заключены в пределах

$$0<\xi<1, \quad -1<\gamma<1, \quad 0<D<\infty, \qquad (22)$$

причем $r(1)=\infty$. При $\gamma<1/2$, $r(0)=0$; при $\gamma=1/2$ решение принимает простой вид (16), где $a=D/2>0$. При $\gamma=1/2$ величина r ограничена снизу значением $r^*>0$, соответствующее ξ^* которого определяется из трансцендентного уравнения

$$1-\gamma-\beta+(1-\gamma+\beta)\,\xi^{\beta}+(1+\gamma+\beta)\,\xi+(1+\gamma-\beta)\,\xi^{\beta+1}=0, \qquad (23)$$

имеющего на интервале $0<\xi<1$ единственное решение.

При больших r решение (21) имеет асимптотический вид

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1-\frac{2\gamma D}{r}, \quad \varphi = \sqrt{\frac{3}{\varkappa}}\,\frac{\beta D}{r}, \qquad (24)$$

т. е. ведет себя как шварцшильдовское с массой

$$M = \frac{8\pi\gamma D}{\varkappa}. \qquad (25)$$

Поэтому, видимо, одно может иметь физический смысл лишь при $\gamma>0$.

При $\gamma=1/2$ метрика совпадает с известной метрикой Райснера—Нордстрема с массой (25) и «зарядом» $\varepsilon = D/\sqrt{2\varkappa}$. При $\gamma\neq 1/2$ единственная существенная сингулярность имеет место при $\xi=0$ $\left(|\varphi(0)| = \sqrt{\frac{3}{\varkappa}},\ e^{\lambda(0)}=0,\ r(0)=0 \text{ и } e^{\nu(0)}=\infty \text{ для } \gamma<1/2;\ r(0)=\infty \text{ и } e^{\nu(0)}=0 \text{ для } \gamma>1/2\right)$. Правда, в случае $\gamma>1/2$ на сфере $\xi=\xi^*$ величина $e^{\lambda}(\xi^*)=\infty$ при конечных e^{ν} и φ. Однако эта сингулярность чисто координатная и легко устраняется переходом от r к радиальной координате ξ.

Запишем значение собственной энергии скалярного поля во внешности сферы $\xi=\xi_0$:

$$E = \int T_0^0\sqrt{-g}\,d^3x = 4\pi\int_{\xi_0}^{1} T_0^0 e^{(\nu+\lambda)/2} r^2\,\frac{dr}{d\xi}\,d\xi. \qquad (26)$$

В результате интегрирования получаем

$$E(r_0) = \frac{4\pi a^2}{\varkappa r_0} \qquad \text{при } \gamma = \pm\frac{1}{2}$$

$$E(\xi_0) = \frac{2\pi\gamma D}{\varkappa}+\frac{\pi D}{\varkappa}\left[(\beta-\gamma)\,\xi_0^{-\beta}-(\beta+\gamma)\,\xi_0^{\beta}\right] \quad \text{при } |\gamma|\neq\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим отдельно случаи $\gamma\leqslant 1/2$ и $\gamma>1/2$.

Когда $\gamma\leqslant 1/2$, плотность T_0^0 всюду положительна, и в центре интеграл (26) расходится. Однако полная энергия материи и гравитационного поля (25) конечна, что можно понять как компенсацию энергии скалярного поля отрицательной энергией гравитации. При отсутствии сингулярностей для полной энергии справедлива формула Толмана

$$M=\int(2T_0^0-T)\sqrt{-g}\,d^3x. \tag{27}$$

Если ее применять формально то, интегрируя по области $r>r_0$, с учетом (6) получим при любом r_0; $M=2E(r_0)$, что совпадает с (25) при $\xi_0^{\beta}=(\beta-\gamma)/(\beta+\gamma)$ для $\gamma<1/2$ и при $r=a$ для $\gamma=1/2$. Это можно интерпретировать как наличие эффективного среза в формуле для полной энергии, аналогично выводам работы [6] для электромагнитного поля. Согласно (27) подобный срез будет иметь место для любой безмассовой материи $(T=0)$, если считать полную гравитационную энергию отрицательной.

Если $\gamma>1/2$, то $T_0^0<0$ при $\xi^{2\beta}<(\gamma-\beta)/(\gamma+\beta)$, что приводит к бесконечному отрицательному значению собственной энергии скалярного поля. С другой стороны, масса (25) конечна и положительна, следовательно, бесконечна и положительна гравитационная энергия, и возникновение «дырки» в решении можно интерпретировать как результат расталкивающего действия гравитационных сил (подробнее см. [8]). По характеру влияния на решение скалярное и метрическое поля как бы меняются ролями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фишер И. З. ЖЭТФ, 18, 636, 1948.
2. Асанов Р. А. ЖЭТФ, 53, 673, 1967.
3. Тагиров Э. А., Черников Н. А. Препринт ОИЯИ Р2—3777, Дубна, 1968.
4. Бронников К. и др. Препринт ИТФ-68-69, Киев, 1968.
5. Бронников К., Мельников В. Препринт ИТФ-69-21, Киев, 1969.
6. Арновитт Р., Дизер С., Мизнер С. Эйнштейновский сборник. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
11. 2 1970 г.

Кафедра
квантовой статистики

УДК 538.116

К. П. БЕЛОВ, Н. В. ВОЛКОВА, Л. П. ШЛЯХИНА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБМЕННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ЗАМЕЩЕННЫХ ФЕРРИТАХ—ГРАНАТАХ ИТТРИЯ МЕТОДОМ РАДО—ФОЛЕНА

Метод Радо и Фолена [1] был применен для нахождения обменных взаимодействий в ферритах—шпинелях [1, 2]. В настоящей работе мы использовали его для определения обменных взаимодействий в замещенных ферритах—гранатах иттрия. Метод Радо—Фолена позволяет найти коэффициенты молекулярного поля [1] α, β и n по экспериментальной кривой температурной зависимости самопроизвольной намагниченности двухподрешеточного феррита с одним сортом магнитного иона. Замещенные ферриты—гранаты иттрия подходят под эту категорию ферритов. Расчет ведется по формулам теории молекулярного поля, получаемым следующим образом. Самопроизвольную намагниченнсcть феррита

$$I_s=\mu I_d-\lambda I_a \tag{1}$$

можно разложить в ряд по параметрам α и β, если в исследуемом феррите $\alpha<1$ и $\beta<1$. Здесь I_d, I_a — намагниченности подрешеток d и a, рассчитанные на один ион,

[1] $\alpha=\dfrac{n_{aa}}{n_{ad}}$, $\beta=\dfrac{n_{dd}}{n_{ad}}$, $n=n_{ad}$.