

рал J_{ij}^* , выражающий обменное взаимодействие иона сорта i со всеми ближайшими ионами сорта j . При этом $J_{ac}^* \neq J_{ca}^*$, так как $Z_{ca} \neq Z_{ac}$. Кроме того, для сопоставления изменения θ_j и J_{ij} следует учесть, что в ферритах-гранатах θ_j определяется не только обменным взаимодействием $a-d$. Некоторое влияние на нее оказывают отрицательные $a-a$ и $d-d$ обменные взаимодействия. Эти взаимодействия как бы препятствуют взаимодействию $a-d$ удерживать магнитные моменты пар ионов, принадлежащих разным подрешеткам (a и d), в антипараллельном состоянии. Это означает, что ферромагнитный порядок в феррите поддерживается за счет преобладания величины межподрешеточных взаимодействий над величинами внутрipoдрешеточных взаимодействий.

Из табл. 1 видно, что при замещении ионов Fe^{3+} немагнитными ионами в a -подрешетке разность $J_{ad}^* - J_{aa}^*$ несколько возрастает, в то же время число магнитных a -ионов в феррите-гранате падает гораздо быстрее. Разность $J_{da}^* - J_{dd}^*$ быстро падает с увеличением замещения. По-видимому, последнее и приводит к понижению температуры Кюри феррита.

Аналогичная ситуация возникает и при замещении на немагнитные ионы в d -подрешетке. В табл. 2 приведены соответствующие разности интегралов обменных взаимодействий. Разность $J_{da}^* - J_{dd}^*$ несколько увеличивается с ростом замещения, тогда как число магнитных d -ионов в гранате уменьшается быстрее. Разность $J_{ad}^* - J_{aa}^*$ резко уменьшается с замещением.

Таким образом, в изменении температуры Кюри при замещении в феррите-гранате иттрия внутрipoдрешеточные $a-a$ и $d-d$ взаимодействия играют не пассивную роль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rado G., Folen V. J. Appl. Phys., 31, 62, 1960.
2. Горяга А. Н., Волкова Н. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., № 2, 75, 1967; № 4, 108, 1968.
3. Geller S., Williams H. T., Espinosa G. P., Sherwood R. C. Bell. System. Technical J., 43, 565, 1964; Phys. Chem. Solids., 26, 443, 1965.
4. Белов К. П., Шляхина Л. П. «Физика металлов и металловедение», 30, 22, 1970.
5. Белов К. П., Горяга А. Н. «Физика металлов и металловедение», 2, 3, 1956.

Поступила в редакцию
16. 2 1970 г.

Кафедра
общей физики для биологов

УДК 62—503

О. Д. АХМАТОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ, СОДЕРЖАЩИХ ЭЛЕМЕНТ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим замкнутые системы с однозначной нечетно-симметричной нелинейностью $f(x)$, содержащие наряду с сосредоточенными параметрами элемент с распределенным запаздыванием (рис. 1). К таким системам относятся генератор, в котором обратная связь осуществляется распределенной RC -линией [1], система регулирования температуры [2] и т. п.

Содержащийся в системе элемент с распределенными параметрами описывается уравнением в частных производных параболического типа и его передаточная функция при условии отсутствия отражений имеет вид

$$G(p) = e^{-Vp\tau},$$

τ — время распределенного запаздывания, p — оператор Лапласа.

Входящие в систему линейные элементы с сосредоточенными параметрами объединены в один блок с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{\Psi_m(p)}{\Phi_n(p)},$$

$\Psi_m(p)$, $\Phi_n(p)$ — целые полиномы p степени m и n соответственно.

Для исследования автоколебаний применен принцип гармонического баланса Крылова — Боголюбова совместно с методом траекторий корней [3].

Гармоническая линеаризация нелинейности возможна, когда линейная часть системы обладает хорошими фильтрующими свойствами [4, 5]. Звено с распределенным запаздыванием является ярко выраженным фильтром низких частот ($|G(\omega)| = e^{-\sqrt{0,5}\omega}$), и наличие такого звена в системе, несмотря на многочастотную природу распределенного элемента, улучшает фильтровые свойства системы. Кроме того, гармоники основного колебания не совпадают с собственными частотами системы, так как последние не кратны основной частоте.

В этом случае, пользуясь принципом гармонического баланса, можно нелинейное звено $f(x)$ заменить эквивалентным линейным с коэффициентом передачи, зависящим от амплитуды колебаний a

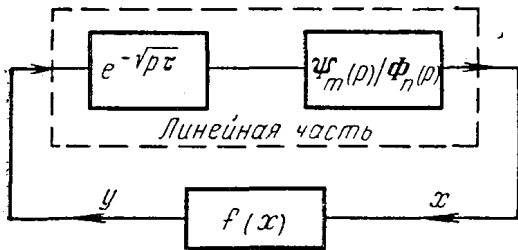


Рис. 1

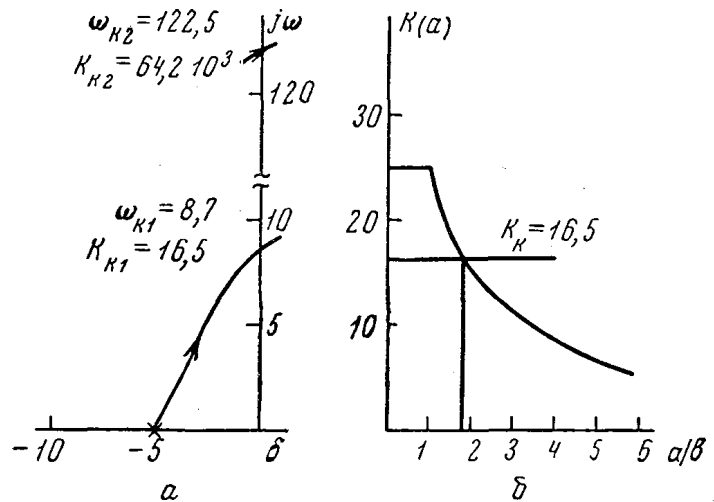


Рис. 2

$$k(a) = \frac{11}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi, \quad \psi = \omega t.$$

Тогда линеаризованное характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид

$$\Phi_n(p) + k(a) \Psi_m(p) e^{-\sqrt{p}\tau} = 0. \quad (1)$$

Для линейной системы (k не зависит от амплитуды a) можно построить траектории корней уравнения (1), принимая k за параметр траекторий, допускающий непрерывное изменение в широких пределах [3]. Уравнение траекторий корней таких систем имеет вид

$$\operatorname{tg} \theta = \omega \frac{\Phi_r(\delta, \omega^2) \Psi_j(\delta, \omega^2) - \Phi_l(\delta, \omega^2) \Psi_r(\delta, \omega^2)}{\Phi_r(\delta, \omega^2) \Psi_r(\delta, \omega^2) + \omega^2 \Phi_j(\delta, \omega^2) \Psi_j(\delta, \omega^2)}, \quad (2)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\theta = \sqrt{0,5(\sqrt{\delta^2 + \omega^2} - \delta)},$$

$$\Phi_n(p) = \Phi_n(\delta + j\omega) = \Phi_r(\delta, \omega^2) + j\omega\Phi_j(\delta, \omega^2),$$

$$\Psi_m(p) = \Psi_m(\delta + j\omega) = \Psi_r(\delta, \omega^2) + j\omega\Psi_j(\delta, \omega^2).$$

Значения свободного параметра для каждой точки на траекториях вычисляются по формуле

$$|k| = e^{-\frac{0,5\omega}{\theta}} \cdot \frac{|\Phi_n(\delta, \omega^2)|}{|\Psi_m(\delta, \omega^2)|}. \quad (3)$$

При исследовании автоколебаний интерес представляют участки траекторий вблизи мнимой оси. Значения критических частот (частот возбуждения) находим из

уравнения (2), полагая $\delta=0$. Соответствующие им значения критического параметра получаются из (3) при $\delta=0$, $\omega=\omega_k$.

Применение предлагаемого метода исследования изложим на примере замкнутой системы, состоящей из усилителя низкой частоты и элемента с распределенным запаздыванием. В этом случае передаточная функция линейной сосредоточенной части

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1} \quad (\text{см. рис. 1})$$

Рассмотрим автоколебания в такой системе, т. е. определим условия возбуждения, частоту и амплитуду периодического движения и исследуем его устойчивость.

Линеаризованное характеристическое уравнение системы имеет вид

$$(Tp + 1) + k(a)e^{-Vp\tau} = 0, \quad (4)$$

Построим траектории корней этого уравнения вблизи начала координат, приняв k за параметр траекторий. Из-за наличия звена с распределенным запаздыванием уравнение (4) имеет, вообще говоря, бесконечное число корней. На рис. 2, а приведены ближайшие к началу координат ветви траекторий корней этого уравнения при $\tau=1$, $T=0,2$. (На рисунке показана верхняя полуплоскость p .) Вследствие того, что характеристическое уравнение (4) содержит двuzначную функцию $e^{-Vp\tau}$, рассматривается плоскость p с разрезом вдоль отрицательной действительной оси от 0 до $-\infty$. Тогда действительная начальная точка ($k=0$) находится на берегах разреза и при увеличении $k > 0$ корни уравнения (4) по двум сопряженным траекториям выходят на комплексную плоскость [6]. Направление движения корней при возрастании параметра k показано стрелкой. С ростом k на мнимую ось выходит пара корней $\pm j\omega_{k1} = \pm j8,7$ при $k=k_{k1}=16,5$. Все остальные корни находятся слева от мнимой оси. Следующая пара корней может выйти на мнимую ось только при $k_{k2}=64,2 \cdot 10^3$ и равна $\pm j\omega_{k2} = \pm j122,5$. Для $k > k_{k1}$ корни по ближайшим к началу координат траекториям выйдут в правую полуплоскость и система становится неустойчивой.

Характер нелинейности $f(x)$ накладывает ограничения на допустимые значения $k(a)$. В зависимости от этих ограничений на траекториях выделяется область допустимых значений корней уравнения (4). Если область допустимых значений корней целиком лежит в левой полуплоскости ($0 < k(a) < k_{k1}$), то система устойчива; в такой системе невозможны автоколебания.

Если $k_{k1} < k(a) < k_{k2}$, то в такой системе могут возникнуть колебания частоты ω_{k1} , амплитуда которых определяется видом нелинейности и находится из соотношения $k(a) = k_{k1}$ или по графически построенной зависимости k от амплитуды a . Характер зависимости $k(a)$ для всех типичных нелинейностей хорошо известен [5].

Для того, чтобы периодический режим амплитуды a_0 был устойчивым, необходимо, чтобы выполнялось неравенство [3]:

$$\left. \frac{d\delta}{da} \right|_{a=a_0} = \left. \frac{\partial \delta}{\partial k} \right|_{k=k_{ki}} \cdot \left. \frac{\partial k}{\partial a} \right|_{a=a_0} < 0. \quad (5)$$

Знак производной $\left. \frac{\partial \delta}{\partial k} \right|_{k=k_k}$ легко определить из графика траекторий корней: если траектории корней при увеличении k пересекают мнимую ось слева направо, то $\left. \frac{\partial \delta}{\partial k} \right|_{k=k_k} > 0$, если справа налево $\left. \frac{\partial \delta}{\partial k} \right|_{k=k_k} < 0$. Знак производной $\left. \frac{\partial k}{\partial a} \right|_{a=a_0}$ определяется из вида функции $k(a)$ (рис. 2б).

Пусть нелинейное звено описывается функцией вида

$$f(x) = \begin{cases} Cx & \text{при } |x| < b \\ B \operatorname{sign} x & \text{при } |x| \geq b. \end{cases} \quad (6)$$

В этом случае

$$k(a) = \begin{cases} C & \text{при } a < b \\ \frac{2C}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) & \text{при } a \geq b. \end{cases}$$

На рис. 2, б представлен график функции $k(a)$ для $C=25$, по которому определена амплитуда автоколебаний в рассматриваемой системе. Возбуждение системы будет мягким, поскольку $k(0) = C > k_{k1}$. Периодический режим частоты $\omega=8,7$ и амплитуды $a_0=1,8b$, согласно (5), устойчив.

В заключение автор благодарит Г. А. Бендрикова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dutta Roy. Proc. IEEE, 53, No. 1, 1965.
2. Цыпкин Я. З. Теория релейных систем автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1955.
3. Кузнецов Ю. И., Теодорчик К. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 1, 1967.
4. Айзерман М. А. «Автоматика и телемеханика», 14, № 5, 1953.
5. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.
6. Конев Ф. Б., Конев Ю. Б. «Изв. вузов», радиофизика, 11, № 3, 1968.

Поступила в редакцию
25. 3 1970 г.

Кафедра
физики колебаний

Б. К. КЕРИМОВ, В. П. ЦВЕТКОВ

ВОПРОС О РАСХОДИМОСТИ В РАДИАЦИОННОЙ ПОПРАВКЕ К НЕЙТРИНО-ЭЛЕКТРОННОМУ РАССЕЙЯНИЮ И НЕЙТРАЛЬНЫЕ ТОКИ

Точное значение радиационных поправок порядка α к $\nu_e e \rightarrow \nu_e e$ -рассеянию вычислить в рамках современной теории невозможно [1—4]. Один из интегралов, появляющихся в конечном выражении, расходится логарифмически и необходимо ввести параметр обрезания Λ . При $\Lambda \rightarrow \infty$ радиационная поправка становится бесконечной и не имеет физического смысла.

В данной заметке показывается, что радиационная поправка порядка α к $\nu_e e$ -рассеянию не будет содержать расходящихся выражений, если в лагранжиан слабого взаимодействия наряду с произведением заряженных токов $(\bar{e}\nu_e)$ $(\bar{\nu}_e e)$ ввести произведение нейтральных барионного и лептонного токов:

$$L_{\omega}^{(p)} = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{p}\gamma_j(1 + \gamma_5)p) (\bar{\nu}_e\gamma_j(1 + \gamma_5)\nu_e). \quad (1)$$

В настоящее время вопрос о роли слабых нейтральных лептонных и барионных токов широко обсуждается [5—10].

Из (1) следует процесс прямого рассеяния нейтрино $\nu_e e$ на протоне $\nu_e + p \rightarrow \nu_e' + p'$. Пока нет экспериментальных доказательств отсутствия такого процесса. Нейтринные эксперименты в ЦЕРНе [8] дают следующий верхний предел для отношения сечений:

$$R = \frac{\sigma(\nu_{\mu} + p \rightarrow \nu_{\mu}' + p')}{\sigma(\nu_{\mu} + n \rightarrow p + \mu^{-})} < 0,5.$$

Лагранжиан взаимодействия L , описывающий $\nu_e e$ -рассеяние с учетом электромагнитных эффектов в нашем случае будет иметь вид

$$L = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{e}\gamma_j(1 + \gamma_5)e) + L_{\omega}^{(p)} + ie(\bar{e}\widehat{A}e) - ie(\bar{p}\widehat{A}p). \quad (2)$$

Исследуем расходящиеся члены в радиационной поправке порядка α к $\nu_e e$ -рассеянию. Расходящийся вклад будут давать две следующие диаграммы:

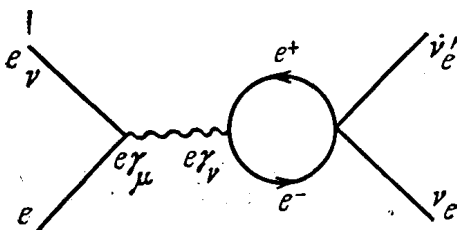


Диаграмма 1

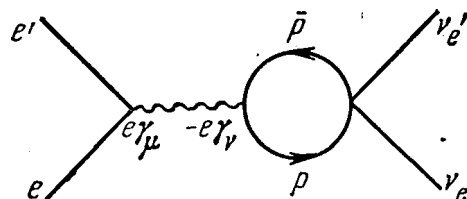


Диаграмма 2