Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1971

УДК 536.750:53:519.25

Р. Л. СТРАТОНОВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ К МЕХАНИКЕ

Развитая ранее автором нелинейная феноменологическая флуктуационно-диссипационная термодинамика применена к механическим системам, которые описываются заданной функцией Гамильтона. Приведены термодинамические соотношения линейно-квадратической и кубической теорий. Ряд результатов выражен через диссипативную функцию.

Введение

В настоящей статье результаты работы [1], относящиеся к феноменологической флуктуационно-диссипационной термодинамике с временно-четными и временно-нечетными переменными, применяются к механическим системам. Предполагается, что термодинамические флуктуационно-диссипационные «силы» имеют смысл обычных механических сил, которые как таковые обычным образом входят в уравнения Эйлера — Лагранжа или уравнения Гамильтона. Следовательно, предполагаются отсутствующими термодинамические «силы», входящие в первое уравнение Гамильтона $\dot{q}_j=\partial H/\partial p_j$. Это вызывает упрощение теории, развитой в [1], а именно, термодинамическими переменными оказываются по существу лишь импульсы или эквивалентные им временно-нечетные переменные Y_j (пропорциональные скоростям). Остается лишь термодинамика только с временно-нечетными переменными. Такая термодинамика, не затрагивающая временно-четных переменных, во многом аналогична развитой ранее [2—4] термодинамике, не рассматривающей временно-нечетных переменных, которая значительно проще термодинамики в смешанном случае [1]. Как и в [1], рассмотрение ограничено неквантовым вариантом.

Простейшие из приводимых в настоящей статье соотношений — двухиндексные соотношения эквивалентны результатам обычной линейной флуктуационно-диссипационной теории, изложенной, например, в [5]. Последующие соотношения, относящиеся к нелинейной теории, являются оригинальными.

§ 1. Параметры и уравнения, описывающие флуктуационно-диссипационную механическую систему

Рассмотрим механическую систему с координатами q_j и импульсами p_j ($j=1, \ldots\ldots N$). Будем предполагать, что стационарное равновесное распределение в фазовом пространстве определяется формулой Гиббса

$$w(q, p) = e^{\beta F - \beta H(q,p)} \qquad (\beta = 1/T). \tag{1}$$

Функцию Гамильтона $H(q, p)$, описывающую поведение рассматриваемой системы, будем считать заданной.

Будем трактовать q и p как термодинамические параметры.

Подставляя (1) в формулы (14) из [1], находим соответствующие данному случаю сопряженные термодинамические параметры

$$X_i = \beta \frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p); \quad Y_j = \beta \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p). \tag{2}$$

Если бы флуктуационно-диссипационный процесс в системе отсутствовал, то эволюция системы описывалась бы уравнениями Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \tag{3}$$

В более общем случае, однако, в системе имеется диссипация, а также вызванные ею по принципу взаимности источники флуктуаций. Предлагая, что флуктуационно-диссипационные эффекты проявляются в форме механических сил и никак иначе, добавим дополнительные флуктуационно-диссипационные члены лишь ко второму из уравнений (4)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} + f_j(q, p) + \xi_j. \tag{4}$$

Здесь $f(q, p)$ — диссипационная сила, а ξ — флуктуационная сила, имеющая по определению нулевое среднее значение

$$\overline{\xi} = 0. \tag{5}$$

Это значит, что входящая, скажем, в равенство (4) работы [1] функция K_j имеет такой вид

$$K_j(q, p) = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p) + f_j(q, p), \tag{6}$$

а все функции более высоких порядков $K_{j_1 j_2}$, $K_{j_1 j_2 j_3}$, ... определяются исключительно флуктуационной силой ξ.

Из первого уравнения (4), кроме того, имеем

$$K_i(q, p) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p). \tag{7}$$

Отсутствие флуктуационных членов в первом уравнении (6) приводит к тому, что все остальные функции $K_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ (кроме (7)), содержащие индекс i хотя бы один раз, тождественно равны нулю

$$K_{i\alpha_1 \ldots \alpha_r}(q, p) = 0 \qquad \text{при } r_i \geqslant 1. \tag{8}$$

Формулы (6), (7) означают, что феноменологические уравнения для рассматриваемой системы имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} + f_j(q, p),$$

или, если в них сделать замену переменных (2):

$$\dot{q}_i = TY_i; \quad \dot{P}_j = -TX_j + f_j(X, Y). \tag{9}$$

Входящие сюда функции $f_j(\cdot)$ обычно бывают известными из опыта или даются феноменологическими теориями. Они (частично) определяют флуктуационные характеристики процесса в фазовом пространстве, характеристики случайных возмущений ξ_j.

§ 2. Следствия из линейной и нелинейной теории

Рассмотрим поочередно результаты применения основных соотношений флуктуационно-диссипационной термодинамики, которые приведены в [1].

Одноиндексные соотношения (I.1 б) из [1], примененные к (6) и (9), принимают вид

$$f_j(0, 0) = 0. \tag{10}$$

Соотношения (I.1 а), очевидно, удовлетворяются в силу (9) и поэтому их не нужно принимать во внимание. Ряд соотношений с большим чем 1 числом индексов удовлетворяются в силу (8), не давая новых результатов. Так, соотношение (II.1 а) в силу (8), (9) дает $0=0$. Подобные соотношения мы не будем далее упоминать.

Из двухиндексных соотношений нетривиальный результат

$$K_{j_1 j_2}(0, 0) = -2\left[\frac{\partial f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}}\right]_{X=Y=0} \tag{11}$$

дает только соотношение (II.1в). Из последних следуют соотношения Онзагера

$$\frac{\partial f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}} = \frac{\partial f_{j_2}}{\partial Y_{j_1}} \quad \text{при } X = Y = 0. \tag{12}$$

Нечетные соотношения взаимности (II.1 б) удовлетворяются в силу вида уравнений (9).

Соотношения (11), (12) относятся к линейной термодинамике флуктуационно-диссипационных процессов, и ими по существу исчерпываются выводы этой линейной теории. Дальнейшие соотношения относятся к нелинейной теории.

Ряд трехиндексных соотношений дает тривиальный результат в силу (8). Выпишем нетривиальные следствия. Соотношение (III.2 г) дает

$$K_{j_1 j_2 j_3} = -2\frac{\partial K_{j_1 j_2}}{\partial Y_{j_3}} = -2\frac{\partial K_{j_2 j_3}}{\partial Y_{j_1}} = -2\frac{\partial K_{j_3 j_1}}{\partial Y_{j_2}} \quad \text{при } X = Y = 0. \tag{13}$$

Соотношения (III.1в), (III.1б) и (III.1 г) приводят соответственно к таким равенствам:

$$\frac{\partial K_{j_1 j_2}}{\partial X_i} = -2\frac{\partial^2 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\partial X_i} \quad \text{при } X = Y = 0; \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial X_{i_1}\partial X_{i_2}}=0 \quad \text{при } X=Y=0; \tag{15}$$

$$\frac{\partial K_{j_1j_2}}{\partial Y_{j_3}}=-\frac{\partial^2 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}}-\frac{\partial^2 f_{j_2}}{\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_1}}-\frac{\partial^2 f_{j_3}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}} \quad \text{при } X=Y=0. \tag{16}$$

Этим исчерпываются независимые трехиндексные соотношения. Перейдем к четырехиндексным равенствам. Из соотношений типа (IV.4) и (IV.3) нетривиальный результат дает только соотношение (IV.3д):

$$2\frac{\partial K_{j_1j_2j_3}}{\partial Y_{j_4}}=2\frac{\partial K_{j_2j_3j_4}}{\partial Y_{j_1}}=2\frac{\partial K_{j_3j_4j_1}}{\partial Y_{j_2}}=2\frac{\partial K_{j_4j_1j_2}}{\partial Y_{j_3}}=-K_{j_1j_2j_3j_4} \tag{17}$$

$$\text{при } X=Y=0.$$

Далее из (IV.2г) имеем

$$\frac{\partial K_{j_1j_2j_3}}{\partial X_i}=-2\frac{\partial^2 K_{j_1j_2}}{\partial Y_{j_3}\partial X_i} \quad \text{при } X=Y=0. \tag{18}$$

Соотношения (IV.1в) и (IV.1д) соответственно дают

$$\frac{\partial^2 K_{j_1j_2}}{\partial X_{i_1}\partial X_{i_2}}=-2\frac{\partial^3 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\partial X_{i_1}\partial X_{i_2}} \quad \text{при } X=Y=0, \tag{19}$$

$$4\frac{\partial^3 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}}+2\frac{\partial^2 K_{j_1j_2}}{\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}}+2\frac{\partial^2 K_{j_1j_3}}{\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_4}}+2\frac{\partial^2 K_{j_2j_3}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_4}}=K_{j_1j_2j_3j_4} \tag{20}$$

$$\text{при } X=Y=0.$$

Последнее нетривиальное четырехиндексное равенство дается соотношением (IV.1г) и имеет вид

$$\frac{\partial^2 K_{j_1j_2}}{\partial Y_{j_3}\partial X_i}=-\frac{\partial^3 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}\partial X_i}-\frac{\partial^3 f_{j_2}}{\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_1}\partial X_i}-\frac{\partial^3 f_{j_3}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}\partial X_i} \tag{21}$$

$$\text{при } X=Y=0.$$

Тем самым перечислены все независимые нетривиальные термодинамические соотношения до четырехиндексных включительно. Более высокие соотношения рассматриваться не будут. Уже по выписанным соотношениям можно подметить некоторые их закономерности.

Усилим соотношение (11), потребовав его выполнения не только в равновесной точке $X=Y=0$, но и при всех x на гиперповерхности $Y=0$

$$K_{j_1j_2}(X,0)=-2\left[\frac{\partial f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}}\right]_{Y=0}. \tag{II.1}$$

Соотношения (14) и (19), очевидно, в точности согласуются с этим усилением, и ни одно из полученных соотношений не противоречит ему. Можно ожидать, что рассмотрением соотношений более высоких порядков можно получить точное доказательство усиленного соотношения.

Аналогичным образом соотношение (18) побуждает усилить соотношение (13), заменив оба эти соотношения следующим:

$$K_{j_1j_2j_3}=-2\frac{\partial K_{j_1j_2}}{\partial Y_{j_3}} \quad \text{при } Y=0. \tag{III.2}$$

Аналогично заменяем (16), (21) усиленным соотношением

$$\frac{\partial K_{j_1j_2}}{\partial Y_{j_3}} = -\frac{\partial^2 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}} - \frac{\partial^2 f_{j_2}}{\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_1}} - \frac{\partial^2 f_{j_3}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}} \quad \text{при } Y = 0. \tag{III.1}$$

Усилим также специфические четырехиндексные соотношения (17) и (20):

$$2\frac{\partial K_{j_1j_2j_3}}{\partial Y_{j_4}} = -K_{j_1j_2j_3j_4} \quad \text{при } Y = 0; \tag{IV.3}$$

$$4\frac{\partial^3 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}} + 2\frac{\partial^2 K_{j_1j_2}}{\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}} + 2\frac{\partial^2 K_{j_1j_3}}{\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_4}} + 2\frac{\partial^2 K_{j_2j_3}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_4}} =$$

$$= K_{j_1j_2j_3j_4} \quad \text{при } Y = 0. \tag{IV.1}$$

Подтверждение этого усиления нужно искать в соотношениях с большим, чем 4 числом индексов.

Важнейшим результатом нелинейной теории является тот факт, что соотношение (11) линейной теории нельзя усилить, распространив его на различные Y, т. е. заменив соотношением

$$K_{j_1j_2}(0, Y) = -2\left[\frac{\partial f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}}\right]_{X=0} \tag{22}$$

или

$$K_{j_1j_2}(X, Y) = -2\frac{\partial f_{j_1}(X, Y)}{\partial Y_{j_2}}, \tag{23}$$

так как уже соотношение (16) опровергает равенство (22), дающее другую формулу

$$\frac{\partial K_{j_1j_2}}{\partial Y_{j_3}} = -2\frac{\partial^2 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}} \quad \text{при } X = Y = 0. \tag{24}$$

В одномерном случае правая часть (16) равна $-3\partial^2 f/\partial Y^2$, а правая часть (24) равна $-2\partial^2 f/\partial Y^2$, что отличается от (16) и, следовательно, является неправильным.

§ 3. Диссипативная функция

Следуя работе [4], введем диссипативную функцию рассматриваемой механической системы, относящуюся не только к линейной, но и к нелинейной флуктуационно-диссипационной теории и являющуюся обобщением обычной [5] диссипативной функции линейной теории.

Определяя диссипативную функцию равенством $2F = d\ln w(q, p)/dt$ (т. е. в силу (1) равенством $2F = -\beta(dH/dt)$, производя дифференцирование и учитывая (3) и (9), получаем

$$2F = -\beta\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i - \beta\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j = -f_j(X, Y)Y_j. \tag{25}$$

При таком определении с погрешностью порядка $(\partial^2 f/\partial Y^2)\,Y^2$ выполняются обычные соотношения линейной теории, позволяющие выразить диссипативные силы через диссипативную функцию

$$f_j = -\frac{\partial F}{\partial Y_j} + O\left(\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}Y^2\right). \tag{26}$$

В самом деле, производя дифференцирование выражения (25) и учитывая вытекающие из (II. 1) соотношения Онзагера

$$\frac{\partial f_{j'}}{\partial Y_j} = \frac{\partial f_j}{\partial Y_{j'}} \quad \text{при } Y = 0 \tag{27}$$

имеем

$$-\frac{\partial F}{\partial Y_j} = \frac{1}{2} f_j(X, Y) + \frac{1}{2}\frac{\partial f_{j'}}{\partial Y_j} Y_{j'} = \frac{1}{2} f_j + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial f_{j'}}{\partial Y_j}\right]_{Y=0} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial^2 f_{j'}}{\partial Y_j \partial Y_k}\right]_0 Y_k\right\} Y_{j'} = \frac{1}{2} f_j + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_j}{\partial Y_{j'}}\right]_0 Y_{j'} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial^2 f_{j'}}{\partial Y_j \partial Y_k}\right]_0 Y_k Y_j + \ldots\right\}.$$

Но последнее выражение отличается от $f_j(X, Y)$ на величину порядка $(\partial^2 f/\partial Y^2) Y^2$.

Согласно формуле (26) через диссипативную функцию выражаются линейные (по Y) члены диссипативных сил. Выразить нелинейные члены сил через диссипативную функцию в общем случае не удается. Однако диссипативная функция играет некоторую роль и в нелинейной теории, а именно определяет (частично) флуктуационные характеристики процесса.

Докажем формулу

$$K_{j_1 j_2}(X, Y) = 2\frac{\partial^2 F(X, Y)}{\partial Y_{j_1} \partial Y_{j_2}} + O\left(\frac{\partial^3 f}{\partial Y^3} \cdot Y^2\right), \tag{28}$$

относящуюся к линейно-квадратичной теории. Дифференцирование выражения $-f_j Y_j$ дает

$$2\frac{\partial^2 F}{\partial Y_{j_1} \partial Y_{j_2}} = -\frac{\partial^2 f_j}{\partial Y_{j_1} \partial Y_{j_2}} Y_j - \frac{\partial f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}} - \frac{\partial f_{j_2}}{\partial Y_{j_1}}.$$

Разлагая члены в правой части в ряд Тейлора, имеем

$$2\frac{\partial^2 F}{\partial Y_{j_1} \partial Y_{j_2}} = -\left[\frac{\partial f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}}\right]_0 - \left[\frac{\partial f_{j_2}}{\partial Y_{j_1}}\right]_0 - \left[\frac{\partial^2 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2} \partial Y_{j_3}}\right]_0 Y_{j_3} -$$

$$- \left[\frac{\partial^2 f_{j_2}}{\partial Y_{j_1} \partial Y_{j_3}}\right]_0 Y_{j_3} - \left[\frac{\partial^2 f_{j_3}}{\partial Y_{j_1} \partial Y_{j_2}}\right]_0 Y_{j_3} + \ldots \tag{29}$$

Сравним это выражение с разложением

$$K_{j_1 j_2}(X, Y) = K_{j_1 j_2}(X, 0) + \left[\frac{\partial K_{j_1 j_2}}{\partial Y_{j_3}}\right]_0 Y_{j_3} + \ldots \tag{30}$$

Вследствие (II.1), (27) в (29) и (30) совпадают члены нулевого порядка по Y, а вследствие (III.1) совпадают также члены первого порядка (это уже результат нелинейной теории). Тем самым формула (28) в первом приближении правильно передает *непостоянство* диффузионных коэффициентов $K_{j_1 j_2}$ относительно изменения Y. Ее полезно сравнить с неправильной в данном приближении формулой (23).

Приведем еще одну формулу, затрагивающую диссипативную функцию. Эта формула позволяет вычислять диффузионный коэффициент третьего порядка

$$K_{j_1 j_2 j_3}(X, Y) = -4\frac{\partial^3 F(X, Y)}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}} + O\left(\frac{\partial^3 f_i}{\partial Y^3} Y\right) \tag{31}$$

и относится к квадратичной (трехиндексной) теории. Справедливость (31) вытекает из соотношений (III.1), (III.2) и из равенства

$$2\frac{\partial^3 F}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}} = -\frac{\partial^2 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}} - \frac{\partial^2 f_{j_2}}{\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_1}} - \frac{\partial^2 f_{j_3}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}} - \\ - \frac{\partial^3 f_j}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}} Y_j,$$

получаемого дифференцированием.

Из формул (28) и (29) видно, что коэффициенты $K_{j_1 j_2}(X, Y)$, $K_{j_1 j_2 j_3}$ удобно вычислять путем предварительного нахождения диссипативной функции.

§ 4. Проблема вычисления флуктуационных характеристик по диссипационной в четырехиндексной теории

Как видим, в рамках линейно-квадратичной теории флуктуационные характеристики процесса полностью определяются диссипационными. К сожалению, этого нельзя сказать о кубической, т. е. четырехиндексной теории. Соотношений (IV.1), (IV.3) недостаточно для того, чтобы полностью и однозначно определить $\partial K_{j_1 j_2}/\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}$, $\partial K_{j_1 j_2 j_3}/\partial Y_{j_4}$, $K_{j_1 j_2 j_3 j_4}$ по $\partial^3 f_{j_1}/\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}$. Как показывает анализ, остается произвол, соответствующий произвольному выбору некоторой четырехиндексной матрицы $L_{j_1 j_2, j_3 j_4}(X)$, которая имеет следующие свойства симметрии:

$$L_{j_1 j_2, j_3 j_4} = L_{j_2 j_1, j_3 j_4};\quad L_{j_1 j_2, j_3 j_4} = L_{j_1 j_2, j_4 j_3};\quad L_{j_1 j_2, j_3 j_4} = L_{j_3 j_4, j_1 j_2}. \tag{32}$$

Поскольку феноменологическая теория не способна определить $L_{j_1 j_2, j_3 j_4}$, для их вычисления следует обратиться к динамической теории или к эксперименту. Указанные величины $L_{j_1 j_2, j_3 j_4}$ имеют следующий физический смысл:

$$L_{j_1 j_2, j_3 j_4} = \frac{\partial^2 K_{j_1 j_2}}{\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}} + \frac{\partial^2 K_{j_3 j_4}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}} \quad \text{при } Y = 0 \tag{33}$$

(из этой формулы следует (32)). В [3] показано, что из (IV.1) вытекает равенство

$$\frac{\partial^2 K_{j_1 j_2}}{\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}} - \frac{\partial^2 K_{j_3 j_4}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}} = \frac{\partial^3 f_{j_3}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_4}} + \frac{\partial^3 f_{j_4}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}} - \frac{\partial^3 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}} - \\ - \frac{\partial^3 f_{j_2}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}} \quad \text{при } Y = 0. \tag{34}$$

Комбинируя (33) и (34), получаем

$$2\frac{\partial^2 K_{j_1 j_2}}{\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}} = \frac{\partial^3 f_{j_3}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_4}} + \frac{\partial^3 f_{j_4}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}} - \frac{\partial^3 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}} - \\ - \frac{\partial^3 f_{j_2}}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_3}\partial Y_{j_4}} + L_{j_1 j_2, j_3 j_4} \quad \text{при } Y = 0. \tag{35}$$

Учтем выводимое из (IV.1) равенство

$$L_{j_1j_2,j_3j_4}+L_{j_1j_3,j_2j_4}+L_{j_1j_4,j_2j_3}=K_{j_1j_2,j_3j_4}-\frac{\partial^3 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}-\frac{\partial^3 f_{j_2}}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}-$$
$$-\frac{\partial^3 f_{j_3}}{\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}-\frac{\partial^3 f_{j_4}}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_3}}\quad \text{при } Y=0, \tag{36}$$

которое в силу (33) есть не что иное, как соотношение (V) из [3]. При помощи диссипативной функции его можно записать несколько короче:

$$K_{j_1j_2j_3j_4}=-2\frac{\partial^4 F}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}+L_{j_1j_2,j_3j_4}+L_{j_1j_3,j_2j_4}+L_{j_1j_4,j_2j_3}. \tag{37}$$

Формулы (35), (37) и (IV.3) выражают все четырехиндексные флуктуационные характеристики через диссипационные характеристики и вспомогательную матрицу $L_{j_1j_2,j_3j_4}$.

Приведем в заключение соответствующее линейно-кубической теории уточнение основной формулы (28). Анализируя квадратичные члены выражения $2\partial^2F/\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_2}$, видим, что они имеют такой вид:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2\partial^4 F}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}\right]_0 Y_{j_3}Y_{j_4}=-\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial^3 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}\right]_0+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial^3 f_{j_2}}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}\right]_0+\left[\frac{\partial^3 f_{j_3}}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_4}}\right]_0+\left[\frac{\partial^3 f_{j_4}}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_3}}\right]_0\right\}Y_{j_3}Y_{j_4}.$$

Согласно же формуле (35), они должны быть такими:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 K_{j_1j_2}}{\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}\right]_0 Y_{j_3}Y_{j_4}=\frac{1}{4}\left\{\left[\frac{\partial^3 f_{j_4}}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_3}}\right]_0+\left[\frac{\partial^3 f_{j_3}}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_4}}\right]_0-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\partial^3 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}\right]_0-\left[\frac{\partial^3 f_{j_2}}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}\right]_0+L_{j_1j_2,j_3j_4}\right\}Y_{j_3}Y_{i_4}.$$

Поэтому уточненная формула имеет вид

$$K_{j_1j_2}(X,Y)=2\frac{\partial^2 F}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_2}}+\frac{1}{4}\left\{3\left[\frac{\partial^3 f_{j_3}}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_4}}\right]_0+3\left[\frac{\partial^3 f_{j_4}}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_3}}\right]_0+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial^3 f_{j_1}}{\partial Y_{j_2}\,\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}\right]_0+\left[\frac{\partial^3 f_{j_2}}{\partial Y_{j_1}\,\partial Y_{j_3}\,\partial Y_{j_4}}\right]_0+L_{j_1j_2,j_3j_4}\right\}Y_{j_3}Y_{j_4}+O(Y^3). \tag{38}$$

Изложенные результаты можно применять к полевым механическим системам, когда число степеней свободы бесконечно. При этом в качестве индексов j_1, j_2, ... выступают точки непрерывного пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 5, 1970; 11, № 6, 1970.
2. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 5, 16—29, 1962.
3. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 84—89, 1967.
4. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 1, 40—46, 1969.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
12.5 1969 г.

Кафедра
теоретической физики