Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1971

УДК 521.401

Б. Н. НОСКОВ

ВОЗМУЩЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОРБИТЫ ОТ СОПРОТИВЛЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

Интегрируются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют элементы промежуточной орбиты, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров. Правые части этих уравнений содержат составляющие возмущающего ускорения, обусловленного сопротивлением атмосферы. Получены выражения для вычисления возмущений элементов от сопротивления атмосферы.

В работе [1] в качестве промежуточного движения космического объекта по орбите гиперболического типа было рассмотрено движение, основанное на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров. Для этого промежуточного движения были получены все формулы, дающие значения координат и составляющих скорости для любого текущего момента времени. Входящие в эти формулы произвольные постоянные a, e, $s=\sin i$ и величины Ω, ω и M принимаются за элементы промежуточной орбиты.

Следующим этапом решения задачи о движении объекта в поле притяжения Земли является рассмотрение различных возмущающих факторов. Эта задача сводится к интегрированию системы трех дифференциальных уравнений второго порядка, правые части которых являются проекциями возмущающего ускорения на соответствующие оси прямоугольной системы координат. Эту систему дифференциальных уравнений удобнее заменить эквивалентной системой шести дифференциальных уравнений первого порядка для некоторых величин, которые назовем оскулирующими элементами. Для этого мы будем считать, что все формулы промежуточного движения справедливы и для возмущенного движения, но входящие в эти формулы величины a, e, s, Ω, ω и M примем в качестве оскулирующих элементов, определяемых так, чтобы уравнения возмущенного движения удовлетворялись.

Тогда для вывода указанной системы дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов [2] необходимо продифференцировать формулы промежуточного движения при условии, что время t и координаты объекта остаются при этом постоянными, а производные от составляющих скорости равны соответствующим составляющим возмущающего ускорения. Интегрированием полученной таким образом системы дифференциальных уравнений находим оскулирующие элементы, подставляя которые в формулы промежуточного движения, находим значения возмущенных координат.

В этой работе будут приведены окончательные результаты вычисления вековых возмущений первого порядка оскулирующих элементов, обусловленных сопротивлением атмосферы.

При этом предполагается, что атмосфера Земли является сферически-симметричной, плотность которой изменяется по экспоненциальному закону, а на тело вследствие сопротивления атмосферы действует возмущающее ускорение

$$R = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{SC}{m},$$

где ρ — плотность атмосферы, S — площадь миделевого сечения тела, C — коэффициент аэродинамического сопротивления, V — скорость тела, m — масса тела.

Тогда при этих условиях указанным методом можно получить дифференциальные уравнения для нахождения возмущений оскулирующих элементов, обусловленных сопротивлением атмосферы.

Эти уравнения, приведенные в работе [3], запишутся следующим образом:

$$\frac{da}{dt} = a^2 k \varkappa \rho_0 \bar{n}\left(\frac{e+\cos F}{e-\cos F}\right)^{3/2} \exp\,(\zeta \sec F),$$

$$\frac{de}{dt} = -ak\varkappa\rho_0 \bar{n}\,(e^2-1)\,\frac{(e+\cos F)^{1/2}}{(e-\cos F)^{3/2}} \exp\,(\zeta \sec F), \tag{1}$$

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 s\,(1-s^2)\,ak\varkappa\rho_0\bar{n}\,(e^2-1)\,\frac{(e \sec F+1)^{1/2}}{(e\sec F-1)^{3/2}} \exp\,(\zeta \sec F),$$

$$\frac{d\,\Delta\Omega}{dt} = \Delta(\mu\dot{v}), \quad \frac{d\,\Delta\omega}{dt} = \Delta(\nu\dot{v}), \quad \frac{d\,\Delta M}{dt} = \Delta\bar{n}, \tag{2}$$

где ρ_0 — значение плотности атмосферы на ограничивающем эллипсоиде [1] (значение плотности вблизи перицентра орбиты), величины v и F связаны соотношением

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\operatorname{tg}\frac{F}{2},$$

причем

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\bar{n}\cos F}{e\sec F-1}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\bar{n}}{(e^2-1)^{3/2}}\,(1+e\cos v)^2, \tag{3}$$

в которых $\bar{n} = \frac{\sqrt{fM}}{a^{3/2}}$, f — гравитационная постоянная, M — масса Земли.

Постоянные величины k, $\varkappa$, ζ, μ, ν и ε находятся при помощи следующих формул:

$$k = \exp\left(\frac{-a_0+a+a_0e_0}{H}\right), \quad \varkappa = \frac{SC}{m}, \quad \zeta = -\frac{ae}{H}, \tag{4}$$

$$\mu = -\frac{3}{2}\cos i\,\varepsilon^2, \quad \nu = \frac{1}{4}\,(12-15s^2)\,\varepsilon^2, \quad \varepsilon = \frac{c}{a\,(e^2-1)}, \tag{5}$$

где, как и в дальнейшем, a_0, e_0, s_0, ... — значения оскулирующих элементов в начальный момент времени t_0 (значения элементов в промежуточном движении), H — постоянная (шкала высот).

В уравнениях (1) и (2) для элементов s, Ω, ω и M отброшены члены, которые приводят к периодическим возмущениям, причем в уравнениях (2) символ Δ означает изменение соответствующей величины, обусловленное сопротивлением атмосферы за промежуток времени $t-t_0$.

Рассмотрим сначала уравнения (1), которые при помощи первой формулы (3) можно представить в виде

$$\frac{da}{dF} = a^2 k\varkappa\rho_0 \frac{(e+\cos F)^{3/2}}{(e-\cos F)^{1/2}} \frac{\exp(\zeta \sec F)}{\cos^2 F},$$

$$\frac{de}{dF} = -a(e^2-1)k\varkappa\rho_0\left(\frac{e+\cos F}{e-\cos F}\right)^{1/2} \frac{\exp(\zeta\sec F)}{\cos^2 F}, \tag{6}$$

$$\frac{ds}{dF} = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 s(1-s^2)a(e^2-1)k\varkappa\rho_0\left(\frac{e+\cos F}{e-\cos F}\right)^{1/2} \frac{\exp(\zeta\sec F)}{\cos F}.$$

Переходя в этих уравнениях к новой переменной λ по формуле

$$\sec F = 1 - \frac{\lambda^2}{\zeta} \tag{7}$$

и раскладывая правые части (6) в ряды по степеням малой величины ζ^{-1} до второй степени включительно, после интегрирования для первого приближения получим следующие выражения:

$$\Delta a = a_0^2\varkappa\rho_0\left(-\frac{2}{\zeta_0}\right)^{1/2}\frac{(e_0+1)^{3/2}}{(e_0-1)^{1/2}}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\left[1-\frac{3e_0^2-8e_0+1}{4(e_0^2-1)}\frac{\lambda^2}{\zeta_0}+\right.$$
$$\left.+\frac{K_a\lambda^4}{\zeta_0^2}\right]\exp(-\lambda^2)\,d\lambda,$$

$$\Delta e = -a_0(e_0^2-1)\varkappa\rho_0\left(-\frac{2}{\zeta_0}\right)^{1/2}\left(\frac{e_0+1}{e_0-1}\right)^{1/2}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\left[1-\right.$$
$$\left.-\frac{3e_0^2-4e_0-3}{4(e_0^2-1)}\frac{\lambda^2}{\zeta_0}+\frac{K_e\lambda^4}{\zeta_0^2}\right]\exp(-\lambda^2)\,d\lambda, \tag{8}$$

$$\Delta s = -\frac{1}{2}\varepsilon_0^2 s_0(1-s_0^2)a_0(e_0^2-1)\varkappa\rho_0\left(-\frac{2}{\zeta_0}\right)^{1/2}\left(\frac{e_0+1}{e_0-1}\right)^{1/2}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\left[1+\right.$$
$$\left.+\frac{e_0^2+4e_0-1}{4(e_0^2-1)}\frac{\lambda^2}{\zeta_0}+\frac{k_s\lambda^4}{\zeta_0^2}\right]\exp(-\lambda^2)\,d\lambda,$$

где λ_0 соответствует значению величины λ при $t=t_0$,

$$\zeta_0 = -\frac{a_0 e_0}{H},\quad K_a = \frac{3-16e_0+50e_0^2+16e_0^3-5e_0^4}{32(e_0^2-1)^2},$$

$$K_e = \frac{-5+24e_0+26e_0^2+8e_0^3-5e_0^4}{32(e_0^2-1)^2},$$

$$K_s = \frac{3-8e_0+10\,e_0^2+40e_0^3+3e_0^4}{32\,(e_0^2-1)^2}, \quad \varepsilon_0 = \frac{a}{a_0\,(e_0^2-1)}.$$

Используя интеграл вероятности

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2}\, d\alpha \tag{9}$$

и интегрируя его по частям, найдем

$$\int_0^z \alpha^2 e^{-\alpha^2}\, d\alpha = -\frac{z}{2} e^{-z^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\Phi(z),$$

$$\int_0^z \alpha^4 e^{-\alpha^2}\, d\alpha = -\frac{z}{2}\, e^{-z^2}\left(z^2+\frac{3}{2}\right) + \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\,\Phi(z). \tag{10}$$

Тогда при помощи (9) и (10) формулы (8) можно представить в виде

$$\Delta a = \frac{1}{2}\, a_0^2\, \varkappa\rho_0 \left(-\frac{2\pi}{\zeta_0}\right)^{1/2} \frac{(e_0+1)^{3/2}}{(e_0-1)^{1/2}} \left\{\left[1-\frac{3e_0^2-8e_0+1}{8\,(e_0^2-1)\,\zeta_0}+\frac{3K_a}{4\zeta_0^2}\right]\times\right.$$
$$\times\left[\Phi(\lambda)-\Phi(\lambda_0)\right]+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\lambda e^{-\lambda^2}-\lambda_0 e^{-\lambda_0^2}\right)\frac{3e_0^2-8e_0+1}{4\,(e_0^2-1)\,\zeta_0}-$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\lambda e^{-\lambda^2}\left(\lambda^2+\frac{3}{2}\right)-\lambda_0 e^{-\lambda_0^2}\left(\lambda_0^2+\frac{3}{2}\right)\right]\frac{K_a}{\zeta_0^2}\right\}, \tag{11}$$

$$\Delta e = -\frac{1}{2}\, a_0\,(e_0^2-1)\,\varkappa\rho_0\left(-\frac{2\pi}{\zeta_0}\right)^{1/2}\left(\frac{e_0+1}{e_0-1}\right)^{1/2}\left\{\left[1-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{3e_0^2-4e_0-3}{8\,(e_0^2-1)\,\zeta_0}+\frac{3}{4}\,\frac{K_e}{\zeta_0^2}\right]\left[\Phi(\lambda)-\Phi(\lambda_0)\right]+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\lambda e^{-\lambda^2}-\lambda_0 e^{-\lambda_0^2}\right)\frac{3e_0^2-4e_0-3}{4\,(e_0^2-1)\,\zeta_0}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\lambda e^{-\lambda^2}\left(\lambda^2+\frac{3}{2}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\lambda_0 e^{-\lambda_0^2}\left(\lambda_0^2+\frac{3}{2}\right)\right]\frac{K_e}{\zeta_0^2}\right\}. \tag{12}$$

$$\Delta s = -\frac{1}{4}\,\varepsilon_0^2\, s_0\,(1-s_0^2)\, a_0\,(e_0^2-1)\,\varkappa\rho_0\left(-\frac{2\pi}{\zeta_0}\right)^{1/2}\left(\frac{e_0+1}{e_0-1}\right)^{1/2}\left\{\left[1+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{e_0^2+4e_0-1}{8\,(e_0^2-1)\,\zeta_0}+\frac{3}{4}\,\frac{K_s}{\zeta_0^2}\right]\left[\Phi(\lambda)-\Phi(\lambda_0)\right]-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\lambda e^{-\lambda^2}-\lambda_0 e^{-\lambda_0^2}\right)\times$$
$$\left.\times\frac{e_0^2+4e_0-1}{4\,(e_0^2-1)\,\zeta_0}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\lambda e^{-\lambda^2}\left(\lambda^2+\frac{3}{2}\right)-\lambda_0 e^{-\lambda_0^2}\left(\lambda_0^2+\frac{3}{2}\right)\right]\frac{K_s}{\zeta_0^2}\right\}. \tag{13}$$

Обратимся теперь к уравнениям (2). Прежде всего заметим, что величины $\Delta(\mu\dot{v})$ и $\Delta(\nu\dot{v})$ находятся интегрированием соответствующих уравнений, которые получаются при дифференцировании формул (3) и (5) по времени t, входящему только через посредство оскулирующих элементов. Если затем по первой формуле (3) перейти к новой переменной дифференцирования F, то получим уравнения

$$\frac{d(\mu\dot{v})}{dF} = \bar{n}' k \frac{(e\sec F+1)^{1/2}}{(e\sec F-1)^{3/2}} \exp(\zeta\sec F) \frac{1}{\cos F},$$

$$\frac{d(\nu\dot{v})}{dF} = \bar{n}'' k \frac{(e\sec F+1)^{1/2}}{(e\sec F-1)^{3/2}} \exp(\zeta\sec F) \frac{1}{\cos F},$$

где

$$\bar{n}' = -\frac{9}{4}\varepsilon^2\cos i\,\bar{n}\,a\sqrt{e^2-1}\,\varkappa\rho_0,$$

$$\bar{n}'' = \frac{9}{8}\varepsilon^2(4-5s^2)\,\bar{n}\,a\sqrt{e^2-1}\,\varkappa\rho_0.$$

Тогда, если перейти снова к переменной λ, то, используя интегралы (8) и (9), найдем

$$\Delta(\mu\dot{v}) = \frac{1}{2}\bar{n}_0'\left(-\frac{2\pi}{\zeta_0}\right)^{1/2}\frac{(e_0+1)^{1/2}}{(e_0-1)^{3/2}}A,$$

$$\Delta(\nu\dot{v}) = \frac{1}{2}\bar{n}_0''\left(-\frac{2\pi}{\zeta_0}\right)^{1/2}\frac{(e_0+1)^{1/2}}{(e_0-1)^{3/2}}A, \tag{14}$$

где

$$A = \left[1+\frac{5e_0^2+8e_0-1}{8(e_0^2-1)\zeta_0}+\frac{3}{4}\frac{K_4}{\zeta_0^2}\right][\Phi(\lambda)-\Phi(\lambda_0)]\times$$

$$\times\frac{5e_0^2+8e_0-1}{4(e_0^2-1)\zeta_0}\left[\frac{\lambda e^{-\lambda^2}}{\sqrt{\pi}}-\frac{\lambda_0 e^{-\lambda_0^2}}{\sqrt{\pi}}\right]-\frac{K_4}{\zeta_0^2}\left[\frac{\lambda e^{-\lambda^2}}{\sqrt{\pi}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\lambda^2+\frac{3}{2}\right)-\frac{\lambda_0 e^{-\lambda_0^2}}{\sqrt{\pi}}\left(\lambda_0^2+\frac{3}{2}\right)\right],$$

$$K_4 = \frac{43e_0^4+144e_0^3+66e_0^2-16e_0+3}{32(e_0^2-1)^2}.$$

Теперь, если воспользоваться интегралами

$$\int_0^\lambda \Phi(\tau)\,d\tau = \lambda\Phi(\lambda)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}(e^{-\lambda^2}-1),$$

$$\int_0^\lambda \Phi(\tau)\,\tau^2 d\tau = \frac{\lambda^3}{3}\Phi(\lambda)+\frac{1}{3\sqrt{\pi}}[\lambda^2 e^{-\lambda^2}+e^{-\lambda^2}-1],$$

то для возмущений 1-го порядка элементов Ω и ω получим после необходимых вычислений следующие формулы:

$$
\begin{aligned}
\Delta\Omega &= -\frac{\bar{n}_0'}{\bar{n}}\left(\frac{e_0+1}{e_0-1}\right)^{1/2}\frac{\sqrt{\pi}}{\zeta_0}B,\\
\Delta\omega &= -\frac{\bar{n}_0''}{\bar{n}}\left(\frac{e_0+1}{e_0-1}\right)^{1/2}\frac{\sqrt{\pi}}{\zeta_0}B,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

где

$$
B = A_0(\lambda-\lambda_0) + A_1[\lambda\Phi(\lambda)-\lambda_0\Phi(\lambda_0)] + A_2(e^{-\lambda^2}-e^{-\lambda_0^2}) + \frac{1}{3}A_3(\lambda^3-\lambda_0^3) +
$$

$$
+\frac{1}{3}A_4\left[\lambda^3\Phi(\lambda)-\lambda_0^3\Phi(\lambda_0)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\lambda^2e^{-\lambda^2}-\lambda_0^2e^{-\lambda_0^2})\right],
$$

$$
A_0 = -\left[1+\frac{5e_0^2+8e_0-1}{8(e_0^2-1)\zeta_0}\right]\Phi(\lambda_0)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lambda_0e^{-\lambda_0^2}\frac{5e_0^2+8e_0-1}{4(e_0^2-1)\zeta_0},
$$

$$
A_1 = 1+\frac{5e_0^2+8e_0-1}{8(e_0^2-1)\zeta_0},\quad A_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[1+\frac{3e_0^2+5e_0-1}{3(e_0^2-1)\zeta_0}\right],
$$

$$
A_3 = \frac{3e_0+1}{4(e_0-1)\zeta_0}\Phi(\lambda_0),\quad A_4=-\frac{3e_0+1}{4(e_0-1)\zeta_0}.
$$

Поскольку уравнение для величины ΔM можно представить в виде

$$
\frac{d\Delta M}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{\bar{n}}{a^0}\Delta a,
$$

то при помощи соответствующей формулы (8) можно получить выражение

$$
\Delta M = \frac{3}{2}a_0\varkappa\rho_0(e_0+1)^{3/2}(e_0-1)^{1/2}\frac{\sqrt{\pi}}{\zeta_0}C',
\tag{16}
$$

где

$$
C' = B_0(\lambda-\lambda_0)+B_1[\lambda\Phi(\lambda)-\lambda_0\Phi(\lambda_0)]+B_2(e^{-\lambda^2}-e^{-\lambda_0^2})+\frac{1}{3}B_3(\lambda^3-\lambda_0^3)+
$$

$$
+\frac{1}{3}B_4\left\{[\lambda^3\Phi(\lambda)-\lambda_0^3\Phi(\lambda_0)]+\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\lambda^2e^{-\lambda^2}-\lambda_0^2e^{-\lambda_0^2})\right\},
$$

$$
B_0 = -\left[1-\frac{3e_0^2-8e_0+1}{8(e_0^2-1)\zeta_0}\right]\Phi(\lambda_0)-\frac{\lambda_0e^{-\lambda_0^2}}{\sqrt{\pi}}\frac{3e_0^2-8e_0+1}{4(e_0^2-1)\zeta_0},
$$

$$
B_1 = 1-\frac{3e_0^2-8e_0+1}{8(e_0^2-1)\zeta_0},\quad B_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{3e_0^2-5e_0+1}{3(e_0^2-1)\zeta_0}\right],
$$

$$
B_3 = \frac{3e_0+1}{4(e_0-1)\zeta_0}\Phi(\lambda_0),\quad B_4=-\frac{3e_0+1}{4(e_0-1)\zeta_0}.
$$

Вообще говоря, в формулах для изменений элементов Ω и ω можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными ζ_0^{-1}, так как соответствующие изменения уже пропорциональны весьма малой величине $\varepsilon^2\zeta_0^{-1}$. Таким образом, можно записать

$$B = [\lambda\Phi(\lambda) - \lambda\Phi(\lambda_0)] + \frac{1}{\sqrt{\pi}}(e^{-\lambda^2} - e^{-\lambda_0^2}).$$

В заключение следует заметить, что вычисления по полученным формулам удобно проводить на ЭВМ, поскольку для интеграла вероятности в большинстве случаев составлена стандартная подпрограмма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Носков Б. Н. Сообщения ГАИШ, № 159, 1969.
2. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Физматгиз, 1963.
3. Носков Б. Н. Сообщения ГАИШ, № 165, 1969.

Поступила в редакцию
16.12 1969 г.

ГАИШ