Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1971

УДК 534.1

С. Н. РЖЕВКИН

О КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛ, ПОГРУЖЕННЫХ В ЖИДКОСТЬ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрены различные методы решения задачи о колебаниях сферы и цилиндра, погруженных в жидкость, под действием плоской звуковой волны с амплитудой скорости v_0. Получены зависимости амплитуды и фазы скорости тела $v(\alpha)$ в функции волнового параметра $\alpha = ka = \frac{2\pi a}{\lambda}$, где a — радиус сферы (или цилиндра). Приведены результаты экспериментальной проверки теории до значения $\alpha = 2{,}5$ ($a \approx 0{,}4\ \lambda$).

Вопрос о колебаниях погруженного в жидкость тела под действием звуковой волны представляет существенный интерес в связи с тем, что на основании анализа этого явления возможно создать приемник звука, обладающий дипольной диаграммой направленности и способный определять направление на источник звука. Далее мы разберем вопрос о колебаниях сферического и цилиндрического тела.

Для случая несжимаемой жидкости и, приближенно, в случае длинных волн, амплитуда скорости колебаний (v) абсолютно жесткой сферы, находящейся в жидкости плотности ρ и имеющей плотность $\bar{\rho}$, при воздействии на нее плоской звуковой волны с амплитудой скорости v_0 выражается соотношением

$$v = \frac{\frac{3}{2}\rho}{\bar{\rho} + \frac{1}{2}\rho}. \tag{1}$$

В случае длин волн, соизмеримых с радиусом сферы (a), т. е. при условии $ka = \frac{2\pi a}{\lambda} \lesssim 1$, соотношение (1) должно быть заменено более точным. В работе [2] было выведено выражение для амплитуды скорости абсолютно жесткой сферы с учетом дифракции волн. При этом учитывалась только часть реакции рассеянного поля, обусловленная присоединенной массой, и не учитывалось влияние сопротивления излучения, которое при $ka > 1$ становится значительным. Рассеяние звука рассчитано в предположении неподвижности сферы, и влияние ее колебаний на рассеяние звука не учитывалось.

При экспериментальных работах представляет интерес использование дипольных приемников в широком диапазоне частот, поэтому существенно провести определение закона колебаний сферы или жесткой сферической оболочки под действием звуковой волны.

Падающую в направлении положительной оси x плоскую волну запишем в виде

$$p_i = p_0 \exp(\omega t - kx), \tag{2}$$

волновой параметр при $r=a$ будем далее обозначать через $\alpha \left(\alpha = \frac{\omega a}{c}\right)$, множитель $\exp(i\omega t)$ опускаем.

Будем считать, что скорость колебаний v возникает под действием на сферу с массой $M = V\bar{\rho}$ поля падающей волны p_i и некоторого добавочного давления, вызываемого рассеянной волной и определяемого выражением

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(\cos\vartheta)\, h_m(kr), \tag{3}$$

где ϑ — полярный угол с осью x; $P_m(\cos\vartheta)$ — полином Лежандра и $h_m(kr)$ — сферическая функция Ханкеля 2 рода. В это выражение входят не известные нам пока коэффициенты a_m. Амплитуда скорости будет равна

$$v = \frac{F_x}{i\omega\bar{\rho}V} = \frac{\int_0^{\pi} (p_i + p_s)_{r=a} \cos\vartheta\, dS}{i\omega\bar{\rho}V}, \tag{4}$$

где $dS = -2\pi a^2\, d(\cos\vartheta)$; F_x — сила давления по направлению оси x.

Выражение для давления плоской волны в форме разложения в ряд по сферическим функциям запишем в известном виде [3].

$$p_i = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^m (2m+1) P_m(\cos\vartheta)\, j_m^{(kr)}{}_{r=a}. \tag{3a}$$

Величина v определится посредством интегрирования сил давления по сфере:

$$v = \frac{-p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \{[i^m (2m+1) j_m + a_m h_m]\, 2\pi a_0^2 \int_0^{\pi} P_m(\cos\vartheta) \cos\vartheta\, d(\cos\vartheta)}{i\omega\bar{\rho}V}.$$

В этом выражении функции от аргумента $\alpha = ka$ сокращенно записаны как j_m и h_m. Интеграл имеет значения

$$\int_0^{\pi} P_m(\cos\vartheta)\cos\vartheta d(\cos\vartheta) = \begin{cases} -\frac{2}{3} & \text{при } m = 1 \\ 0 & \text{при } m \neq 1 \end{cases}$$

В результате получим

$$v = \frac{i3p_0 j_1 + a_1 h_1}{i\omega\bar{\rho}V}. \tag{5}$$

Рассеянное поле давления на поверхности сферы, колеблющейся с амплитуды скорости v, будем приближенно считать состоящим из

поля p_s°, волны, рассеянной неподвижной сферой, и поля p_v, возникающего в результате реакции среды при колебаниях сферы с амплитудой скорости v, пока нами еще не найденной;

$$p_s = p_s^0 + p_v = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(\cos\vartheta)\, h_m. \tag{6}$$

Выражение для p_s^0 известно [4]:

$$p_s^0 = -p_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^{m+1}(2m+1) P_m(\cos\vartheta) \sin\delta_m(\alpha)\, e^{i\delta_m(\alpha)} h_m(\alpha). \tag{7}$$

Используя метод нахождения звукового поля сферы при заданной на ее поверхности скорости ($v\cos\vartheta$), найдем коэффициенты (b_m) разложения потенциала скорости в ряд по сферическим функциям (см. [3], стр. 215). В данном случае отличен от нуля будет только коэффициент

$$b_1 = \frac{v}{ikD_1(\alpha)\, e^{-i\delta_1(\alpha)}} = -\frac{v}{kh_1'(\alpha)},$$

где $h_1'(\alpha) = -iD_1(\alpha)\, e^{-i\delta_1(\alpha)}$ — производная от сферической функции Ханкеля (второго рода) по аргументу при $r = a$; $D_1(\alpha)$ и $\delta_1(\alpha)$ — функции, введенные и табулированные в книге [4]. Поле p_v на поверхности сферы определится из выражения

$$p_v = i\omega\rho b_1 h_1 \cos\vartheta = -i\rho c\, \frac{h_1}{h_1'} \cos\vartheta c v; \tag{8}$$

h_1 и h_1' — сокращенное обозначение $h_1(\alpha)$ и $h_1'(\alpha)$.

Подставляя в (8) значение v по формуле (5), получим

$$p_v = -i\rho c \frac{h_1}{h_1'} \cos\vartheta\, \frac{3p_0 j_1 + a_1 h_1}{i\omega a\bar{\rho}} = -\frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{h_1}{\alpha h_1'} (i3p_0 + a_1 h_1 \cos\vartheta). \tag{8a}$$

Проинтегрируем по сфере произведение суммарного давления p_s на сферическую функцию P_n:

$$\int_0^\pi p_s P_n S = \sum_{m=0}^{\infty} a_m h_m \int_0^\pi P_m P_n\, dS =$$

$$= -p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \Big[i^{m+1}(2m+1) \sin\delta_m e^{i\delta_m} h_m \int_0^\pi P_m P_n\, dS -$$

$$- \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{h_1}{\alpha h_1'} (i3p_0 + a_1 h_1) \int_0^\pi P_n \cos\vartheta\, dS \Big].$$

Учитывая

$$\int_0^\pi P_m P_n\, d_1 S = \begin{cases} -2\pi a^2 \dfrac{2}{2m+1}; & n = m \\ 0; & n \neq m \end{cases} \quad \text{и } \cos\vartheta = P_1,$$

а также ([3], стр. 212)

$$j_1' = -D_1 \sin\delta_1; \quad \sin\delta_1 e^{i\delta_1} = i\frac{h_1}{h_1'}, \tag{9}$$

получим для каждого $n = m$ отдельные уравнения, из которых определяется коэффициенты a_m:

$$a_1 = i3p_0 \frac{\frac{\rho}{\bar{\rho}}\frac{j_1}{\alpha} - j_1'}{h_1' - \frac{\rho}{\bar{\rho}}\frac{h_1}{\alpha}} \quad \text{при } m = 1, \tag{10}$$

$$a_m = -p_0 i^{m+1}(2m+1)\sin\delta_m e^{i\delta_m} h_m \text{ при } m \neq 1. \tag{10a}$$

Выражение (10) дает коэффициент разложения в формуле (3) для рассеянной волны порядка $m=1$ с учетом осцилляционных колебаний сферы, возникающих под действием падающей волны. Выражение (10а) для $m \neq 1$ совпадает с выражением (7) для коэффициента рассеяния на неподвижной сфере, откуда следует, что возникающие осцилляционные колебания, не дают излучения сферических волн порядка, отличного от $m=1$.

Подставляя a_1 в (5), получим

$$v = \frac{3p_0}{\omega a\bar{\rho}}\left[j_1 + h_1 \frac{\frac{\rho}{\bar{\rho}}\frac{j_1}{a} - j_1'}{h_1' - \frac{\rho}{\bar{\rho}}\frac{h_1}{\alpha}}\right] = \frac{3p_0}{\omega a h_1'} \frac{j_1 h_1' - h_1 j_1'}{\bar{\rho} - \rho\frac{h_1}{\alpha h_1'}}. \tag{11}$$

Учитывая выражения для сферических бесселевых функций и их производных, запишем

$$j_1 h_1' - h_1 j_1' = \frac{1}{i\alpha^2}, \tag{12}$$

а также найдем следующее соотношение:

$$\frac{h_1(\alpha)}{h_1'(\alpha)} = -\frac{\alpha}{2}\left[2\frac{2+\alpha^2}{4+\alpha^4} - i\frac{2\alpha^3}{4+\alpha^4}\right] = \frac{iZ_1}{\frac{1}{3}Sp c} = -\frac{\alpha}{2}\mu, \tag{13}$$

где

$$Z_1 = \frac{1}{3}Sp c\frac{\alpha^4}{4+\alpha^4} + i\omega\rho V\frac{2+\alpha^2}{4+\alpha^4} \tag{14}$$

импеданс сферы при осцилляционных колебаниях $S = 4\pi a^2$, $V = {}^4/_3\pi a^3$, а

$$\mu = 2\left[\frac{2+\alpha^2}{4+\alpha^4} - i\frac{\alpha^3}{4+\alpha^4}\right]. \tag{14a}$$

При $\mu \ll 1$ величина μ стремится к единице.

Используя эти выражения, получим для комплексной амплитуды скорости сферы выражение

$$v(\alpha) = \frac{\frac{3}{2}\rho e^{i\delta_1(\alpha)} v_0}{\left(\bar{\rho} + \frac{\rho\mu}{2}\right)\sqrt{1 + \frac{\alpha^4}{4}}} = \frac{3\rho}{\bar{\rho} + \frac{\rho\mu}{2}} \frac{e^{i\delta_1(\alpha)}}{\sqrt{4+\alpha^4}} v_0. \tag{15}$$

В случае длинных волн ($\alpha \ll 1$) мы получим для $v(\alpha)$ выражение (1).

Результат, тождественный с (15), получится, если при вычислении силы давления F_x учитывать только давление $(p_i^0 + p_s^0)/_{r=a}$ на неподвижную сферу ([3], стр. 269):

$$F_x = \frac{4\pi a^2 e^{i\delta_1(\alpha)}}{\alpha^2 D_1(\alpha)} p_0, \quad \text{где } D_1(\alpha) = \frac{\sqrt{4+\alpha^4}}{\alpha^3},$$

но для расчета амплитуды скорости добавить к инерционному импедансу сферы $i\omega\bar{\rho}V$ импеданс Z_1 (14), возникающий за счет реакции окружающего поля. Таким образом, безразлично, учитывать ли добавочные силы давления p_v, возникающие при колебании сферы с амплитудой скорости v, или рассчитывать суммарную силу, действующую на сферу без учета p_v, но необходимо добавить к собственному инерционному импедансу сферы импеданс, вызываемый реакцией поля излучения (14).

Оба способа расчета до некоторой степени не корректны, поскольку они используют выражения для сил давления, возникающих при рассеянии звука на неподвижной сфере, тогда как сфера находится в состоянии колебательного движения. Следует учитывать, однако, что амплитуда колебаний сферы оказывается весьма малой по сравнению с длиной волны, и потому граничное условие на неподвижной сфере не будет практически отличаться от условия на сфере движущейся.

На рис. 1 приведены графики для амплитуды скорости сферы в функции аргумента $\alpha = \frac{\omega a}{c} = ka$ при различных соотношениях плотности среды ρ и средней плотности сферы $\bar{\rho}$; на графиках приведено отношение амплитуды скорости $v(\alpha)$ к амплитуде скорости (1), получающейся для случая несжимаемой жидкости (1—$\bar{\rho}=0{,}5\ \rho$; 2—$\bar{\rho}=\rho$; 3—$\bar{\rho}=2{,}7\ \rho$).

На рис. 2 приведена амплитуда скорости $v(\alpha)$ для случая $\bar{\rho}=2{,}7$ и экспериментальные точки, полученные при градуировке сферического приемника в воде. На рис. 3 приведена разность фазы φ колебательной скорости сферы и фазы колебаний в падающей волне (обозначения те же, что на рис. 1).

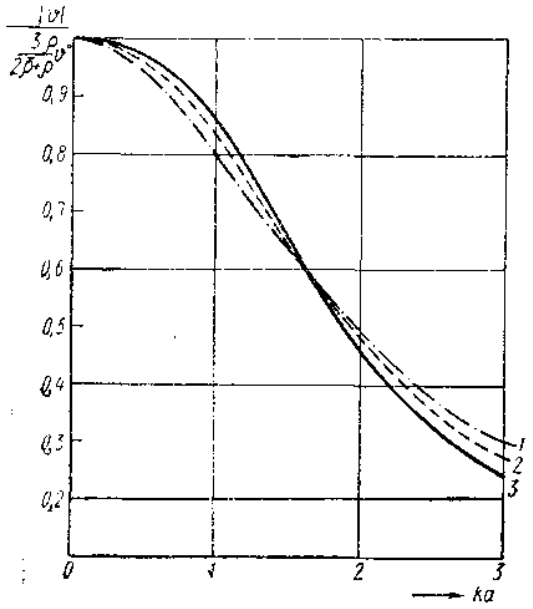

Рис. 1

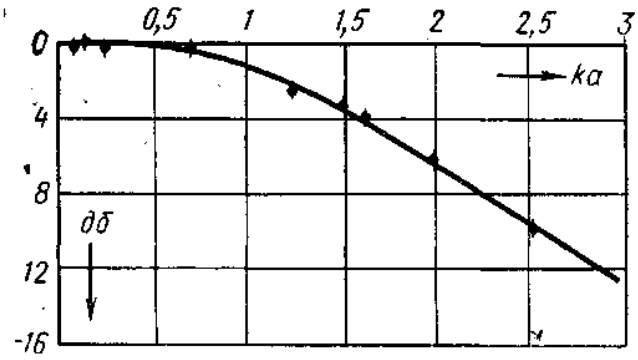

Рис. 2

Амплитуду скорости колебаний сферы под действием звуковой волны можно получить также из формулы для рассеяния звука на гибкой сфере, выведенной в [3] (стр. 273). Будем предполагать, что сфера весьма жесткая, но обладает плотностью того же порядка, как и окружающая жидкая среда; таким образом скорость звука в веще-

стве сферы $\bar{c} \gg c$. При этих условиях пульсационные колебания сферы будут, очевидно, весьма слабы, осцилляционные же колебания будут иметь конечную величину. Для амплитуды колебаний сферы с плотностью $\bar{\rho}$ в жидкости с плотностью ρ, исходя из граничных условий, заключающихся в равенстве при $r=a$ звукового давления и нормального компонента скорости внутри и снаружи сферы, получим выражение

$$v = -\frac{k}{i\omega\rho}\left\{i3p_0\left[-D_1(\alpha)\sin\delta_1(\alpha)\right] + A_1 D_1(\alpha)\, e^{-\left[i\delta_1(\alpha)+\frac{\pi}{2}\right]}\right\} =$$

$$= \frac{3p_0}{\rho c} j_1' - iA_1 \frac{h_1'}{\rho c}, \tag{16}$$

в котором первый член обусловлен действием падающей, а второй — рассеянной волны. Коэффициент A_1, определяющий амплитуду рассеянной волны первого порядка находится по формуле ([3], стр. 274)

$$A_1 = -3p_0 \frac{\frac{\bar{\rho}\bar{c}}{\rho c} D_1 \sin\delta_1 \bar{j}_1' - \bar{D}_1 \sin\bar{\delta}_1 j_1}{\frac{\bar{\rho}\bar{c}}{\rho c} D_1 e^{-i\delta_1} \bar{j}_1 + iG_1 e^{-i\varepsilon_1} \bar{D}_1 \sin\bar{\delta}_1}, \tag{17}$$

где $G_1 e^{-i\varepsilon_1} = h_1$; функции без черты берутся от аргумента α; черта над знаком функции означает, что аргументом функции служит величина $\bar{\alpha} = \frac{\omega a}{\bar{c}} = \frac{c}{\bar{c}}\alpha$. Функции, входящие в (17), представим в следующем виде:

$$\bar{j}_1 = \frac{c}{\bar{c}} j_1 \frac{\bar{j}_1 \bar{c}}{j_1 c} = \frac{c}{\bar{c}} j_1 \beta_1; \quad \bar{j}_1' = j_1' \frac{\bar{j}_1'}{j_1'} = j_1' \beta_2,$$

тогда (17) примет вид

$$A_1 = -i3p_0 \frac{\frac{\bar{\rho}}{\rho} j_1' j_1 \beta_1 - j_1' j_1 \beta_2}{\frac{\bar{\rho}}{\rho} h_1' j_1 \beta_1 - h_1 j_1' \beta_2}. \tag{18}$$

Подставив это выражение в (16), получим

$$v = \frac{3p_0}{\rho c} \frac{j_1' \beta_2}{j_1 \beta_1} \frac{j_1 h_1' - h_1 j_1'}{h_1' \frac{\bar{\rho}}{\rho} - \frac{h_1 j_1' \beta_2}{h_1' j_1 \beta_1}}.$$

Используя соотношение (12) и (13), получим окончательно для амплитуды скорости сферы:

$$v = \frac{\frac{3}{2}\rho}{\bar{\rho} + \frac{\rho}{2}\gamma(\bar{\alpha})\mu(\alpha)} \frac{\gamma(\bar{\alpha})\, e^{i\delta_1(\alpha)}}{\sqrt{1+\frac{\alpha^4}{4}}} v_0, \tag{19}$$

где

$$\gamma(\bar{\alpha}) = \frac{j_1'(\alpha)}{j_1(\alpha)} \alpha \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\bar{j}_1'}{\bar{j}_1} \bar{\alpha} = -\frac{\bar{D}_1 \sin\delta_1}{\bar{j}_1(\bar{\alpha})}. \tag{20}$$

Множитель $\gamma(\bar{\alpha})$ может быть определен по таблице функции $D_1(\bar{\alpha})$ и $\delta_1(\bar{\alpha})$, приведенных в [4]. Для значений $\bar{\alpha}=0{,}4$; 0,6; 1,0 получается соответственно $\gamma(\bar{\alpha})=0{,}96$; 0,89; 0,81. Соответственные значения $\alpha=\frac{\bar{c}}{c}\bar{\alpha}$ получатся путем умножения на отношение скорости в твердой сфере к скорости в жидкости (приблизительно равное трем). Таким образом, при $\alpha \leqslant 1$, т. е. $\lambda \geqslant 2a$, получится $\bar{\alpha} \leqslant 0{,}3$, поправочный множитель γ становится близок к единице, а формула (19) дает значения, близкие к (15), выведенные для абсолютно жесткой сферы, для которой $\bar{c}=\infty$ и $\gamma(\bar{\alpha})$ точно равно единице.

Скорость колебания сферического тела в жидкости можно определить другим методом — на основании закона сохранения импульса. Импульс колеблющегося с амплитудой скорости v сферического тела (объема V и плотности ρ) вместе с добавленным к нему суммарным импульсом жидкости, колеблющейся под действием движущегося в ней (с относительной скоростью) тела, должен быть равным импульсу вырезанного из жидкости объема V, совершающего колебания с амплитудой скорости, существующей до внесения в нее тела в силу наличия плоской волны (2).

Амплитуда скорости этого объема будет равна

$$v=\frac{\int\limits_0^{\pi} p_i/_{r=a}\cos v dS}{i\omega\rho V}=\frac{i4\pi a^2 3j_1}{i\omega\rho\frac{4}{3}\pi a^3}p_0=\frac{3j_1}{\alpha}v_0, \tag{21}$$

где p_i определяется формулой (3а), при условии $\alpha \ll 1$ $v \approx v_0$.

Импульс вырезанного из жидкости сферического объема V (по амплитуде) будет равен

$$\frac{3j_1}{\alpha}\rho V v_0. \tag{22}$$

Скорость частиц в жидкости на поверхности сферы (в направлении радиуса сферы) в процессе волнового движения (2) определяется как отрицательная производная от потенциала скоростей по радиусу при $r=a$

$$v'=-\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}\bigg|_{r=a}=\frac{-k}{i\omega\rho}\frac{\partial p_i}{\partial(kr)}\bigg|_{r=a}=\frac{ip_0}{\rho c}\sum_{m=0}^{\infty}i^m(2m+1)P_m(\nu)j'_m,$$

где p_i выражается бесконечной суммой (3а).

В полученном выражении следует взять только член, соответствующий $m=1$, выражающий колебание сферического объема вдоль оси x, т. е.

$$v'=\frac{i}{\rho c}[i3\cos\vartheta j'_1]p_0=-3j'_1\cos\vartheta v_0.$$

При $\vartheta=0$ (навстречу падающей волне) мы получим скорость $v'_0=-3j'_1v_0$ по радиусу, т. е. направленную по положительной оси x; при $\vartheta=\pi$ скорость имеет ту же величину со знаком минус, т. е. также направлена по положительной оси x. Таким образом, амплиту-

да скорости по оси x объема жидкости V как целого, вызванная звуковой волной, равна

$$v' = 3j_1' v_0, \tag{23}$$

при $\alpha \ll 1$ величина $v' \approx v_0$.

Относительная скорость движения тела и окружающей жидкости равна (по амплитуде) $v - v' = v - 3j_1' v_0$, а импульс жидкости, вызываемый движением, будет равен произведению относительной скорости на присоединенную массу. Присоединенная масса M' на основании (13) выразится через импеданс Z_1 осциллирующей сферы

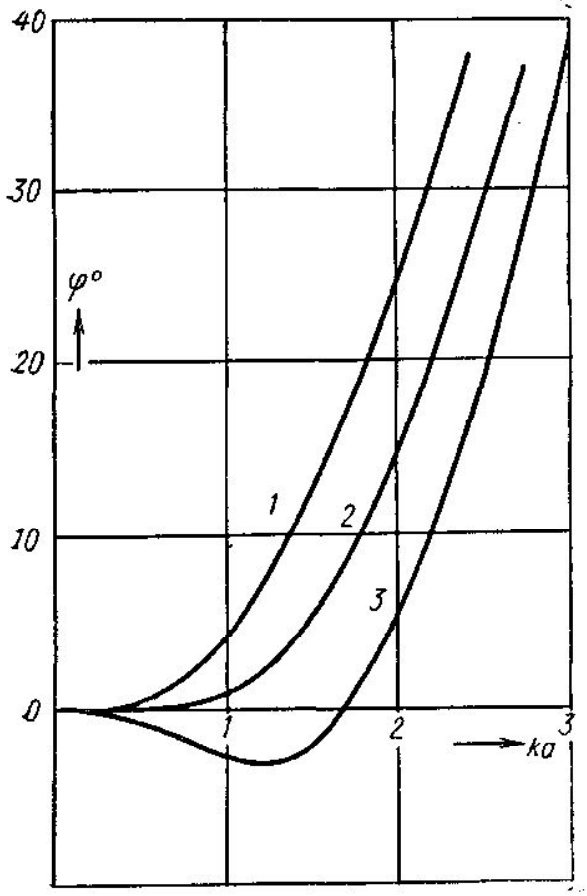

Рис. 3

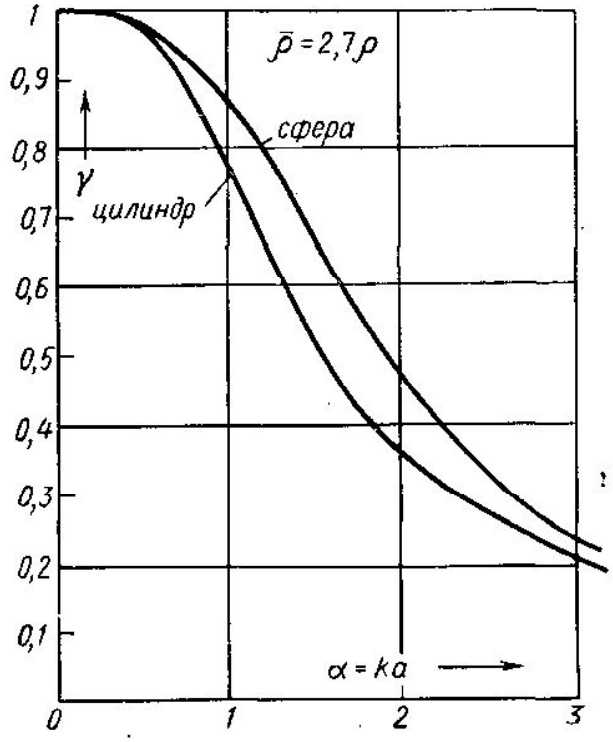

Рис. 4

$$M' = \frac{Z_1}{i\omega} = V\frac{p}{2}\mu.$$

Таким образом, импульс окружающей жидкости вместе с импульсом движущегося тела будет равен (по амплитуде)

$$V\frac{p}{2}\mu\,[v - 3j_1' v_0] + \bar{\rho}V. \tag{24}$$

Приравнивая эту величину импульсу воображаемого сферического объема, вырезанного из жидкости (22), получим уравнение, из которого найдем

$$v = 3\rho\,\frac{\dfrac{j_1}{\alpha} + j_1'\dfrac{\mu}{2}}{\bar{\rho} + \dfrac{\rho}{2}\mu}\,v_0.$$

Учитывая, что согласно (13) $\frac{\mu}{2} = -\frac{h_1}{\alpha h_1'}$, после преобразований получим

$$v = \frac{\frac{3}{2}\rho e^{i\delta_1(\alpha)} v_0}{\left(\bar{\rho} + \frac{\rho\mu}{2}\right)\sqrt{1 + \frac{\alpha^4}{4}}},$$

т. е. выражение, в точности соответствующее (15).

Тем же методом, как и в начале статьи, решается задача о колебаниях в жидкости плотности ρ бесконечного круглого цилиндра, имеющего плотность $\bar{\rho}$, под действием плоской волны, падающей по направлению положительной оси x перпендикулярно оси цилиндра. Используя ([3], стр. 305) выражение для суммарного давления падающей и рассеянной волны на поверхности неподвижного цилиндра (радиуса a), получим

$$[p_i(r) + p_s(r)]_{r=a} = \frac{4p_0}{\pi\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos m\varphi}{C_m(\alpha)} e^{i\left[\gamma_m(\alpha) - \frac{m\pi}{2}\right]}, \tag{25}$$

где $C_m(\alpha)$ и $\gamma_m(\alpha)$ — вспомогательные функции, табулированные в [4].

Найдем силу, действующую на цилиндр в направлении оси x, рассчитанную на единицу длины цилиндра

$$F_x = \int_0^{2\pi} [p_i + p_s]_{r=a} a \cos\varphi d\varphi = \frac{4a\rho c}{\pi\alpha} v_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{i\left[\gamma_m(\alpha) - \frac{m\pi}{2}\right]}}{C_m(\alpha)} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos\varphi d\varphi.$$

Входящий в это выражение интеграл отличен от нуля только при $m = 1$ и равен π. Тогда

$$F_x = i\frac{4a\rho c e^{i\gamma(\alpha)}}{\alpha C_1(\alpha)} v_0. \tag{26}$$

Амплитуда колебательной скорости (комплексная) будет равна

$$v = \frac{F_x}{i\omega\pi a^2\bar{\rho} + Z_1'}, \tag{27}$$

где Z_1' — импеданс на единицу длины цилиндра, осциллирующего вдоль оси x с амплитудой скорости v перпендикулярно к своей оси. Согласно выводу, приведенному в [3], стр. 300, запишем

$$Z_1' = \pi a\rho c \frac{H_1(\alpha) e^{i\gamma_1(\alpha)}}{C_1(\alpha)} = -i\omega\pi a^2\rho \frac{H_1(\alpha)}{H_1'(\alpha)} = i\omega\pi a^2\rho\mu'(\alpha), \tag{28}$$

где $H_1(\alpha) = I_1(\alpha) - iN_1(\alpha)$ — функция Ханкеля второго рода;

$$H_1'(\alpha) = \left.\frac{dH(kr)}{d(kr)}\right|_{r=a} = -iC_1(\alpha) e^{-i\gamma_1(\alpha)}.$$

В формулу (23) введена величина

$$\mu' = -\frac{H_1(\alpha)}{\alpha H_1'(\alpha)} = \frac{I_1(\alpha) - iN_1(\alpha)}{i\alpha C_1(\alpha)} e^{i\gamma_1(\alpha)}. \tag{29}$$

Подставляя Z_1' в (27), получаем

$$v = \frac{4\rho e^{i\gamma_1(\alpha)} v_0}{\pi a^2 C_1(\alpha)(\bar{\rho} + \rho\mu')} = \frac{2\rho}{\bar{\rho} + \rho\mu'} \left[\frac{2e^{i\gamma_1(\alpha)}}{\pi a^2 C_1(\alpha)} \right] v_0. \tag{30}$$

При $\alpha \ll 1$, используя предельные значения $C_1(\alpha) \approx \frac{2}{\pi\alpha^2}$, $\gamma_1(\alpha) \approx 0$ и $\mu' \approx \approx 1$, убеждаемся, что множитель в квадратных скобках стремится к единице. Тогда получаем формулу

$$v = \frac{2\rho}{\bar{\rho} + \rho} v_0, \tag{31}$$

выводимую в гидродинамике несжимаемой жидкости. Присоединенная масса цилиндра в этих условиях равна массе жидкости, вытесненной цилиндром. На рис. 4 приведены величины амплитуды скорости сферы и цилиндра в функции (ka) при $\frac{\bar{\rho}}{\rho} = 2{,}7$ по отношению к амплитуде скорости в несжимаемой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953, гл. 1, § 11.
2. Leslie C., Kendall J., Jones J. JASA, 28, 711, 1956.
3. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960, гл. 8 (стр. 212 и 215) гл. 9 (стр. 259, 275) и гл. 10 (стр. 300, 305, 386).
4. Морз Ф. Колебания и звук. М., Гостехиздат, 1949.

Поступила в редакцию
29.1 1970 г.

Кафедра
акустики