Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1971

УДК 530.145;532.132

В. А. ЗАГРЕБНОВ

О ФОНОН-ФОНОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ЖИДКОМ ГЕЛИИ

Рассмотрено влияние взаимодействия фононов в жидком гелии при $T=0°К$ в кубическом приближении на собственную энергию фонона. Показано, что перенормированный спектр («одетых») фононов устойчив, что предполагалось Ландау и Халатниковым при расчете вязкости жидкого гелия.

Введение

Для расчета некоторых эффектов в жидком гелии (вязкость, затухание акустических колебаний) оказывается существенным отклонение фононной части спектра от линейности. Впервые на этот факт, следующий из требования устойчивости фонона относительно распада, подтвержденный потом экспериментально [1], указали Ландау и Халатников [2, 3]. Они получили величину отклонения от линейного закона интерполированием всей энергетической кривой (спектра) полиномом по степеням импульса, проходящим через характерные точки спектра возбуждений. Такой метод дал для фононной части спектра $\left(0 \leqslant \frac{p}{\hbar} \leqslant 1 \mathring{A}^{-1}\right)$ выражение

$$\varepsilon(p) = cp(1-\gamma p^2), \tag{1}$$

где p — импульс фонона, $c \simeq 237$ *м/сек* — скорость звука, а $\gamma \simeq 2{,}5 \cdot 10^{37}$ $г^{-2} см^{-2} сек^2$. Очевидно, распад фонона со спектром (1) невозможен, так как при этом невозможно одновременно удовлетворить законам сохранения энергии и импульса, т. е. спектр (1) устойчив. Однако такой способ дает весьма грубую оценку величины отклонения спектра от линейности.

В настоящей работе рассматривается влияние на фононную часть спектра возбуждений фонон-фононного взаимодействия, которое обязано наличию ангармонических членов в гамильтониане, описывающем квантовую гидродинамику гелия [4, 5]. Показано, что спектр «перенормированных» фононов устойчив (см. замечание Халатникова в [4]).

§ 1. Гамильтониан неидеального бозе-газа фононов

Будем исходить из гамильтониана (точнее, его плотности) квантовой гидродинамики гелия [4, 5], который, учитывая потенциальность движения жидкости и малость отклонения от равновесного состояния, разложим по степеням $\hat{\rho}-\rho_0$ (ρ_0 — равновесная плотность) и представим в виде

$$\mathscr{H}(\vec{r})=\mathscr{H}_0(\vec{r})+\mathscr{H}_1(\vec{r})+\mathscr{H}_2(\vec{r})+\ldots=\left\{\frac{1}{2}\vec{\nabla}\hat{\varphi}\rho_0\vec{\nabla}\hat{\varphi}+\frac{1}{2}\frac{c_0^2}{\rho_0}(\hat{\rho}-\rho)_0^2\right\}+$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\vec{\nabla}\hat{\varphi}(\hat{\rho}-\rho_0)\vec{\nabla}\hat{\varphi}+\frac{1}{3!}\left(\frac{d}{d\rho}\frac{c^2}{\rho}\right)_{\rho_0}(\hat{\rho}-\rho_0)^3\right\}+\left\{\frac{1}{4!}\left(\frac{d^2}{d\rho^2}\frac{c^2}{\rho}\right)_{\rho_0}(\hat{\rho}-\rho_0)^4\right\}+\ldots, \tag{2}$$

где $c=c(\rho)$ — скорость звука при плотности $\rho(c_0=c(\rho_0))$, $\hat{\varphi}(\vec{r})$ — оператор потенциала скорости, $\hat{\rho}(\vec{r})$ — оператор плотности, которые подчинены коммутационным соотношениям

$$[\hat{\rho}(\vec{r})\hat{\varphi}(\vec{r}')]=\frac{\hbar}{i}\delta(\vec{r}-\vec{r}'),$$

$$[\hat{\rho}(\vec{r})\hat{\rho}(\vec{r}')]=[\hat{\varphi}(\vec{r})\hat{\varphi}(\vec{r}')]=0. \tag{3}$$

Далее в выражении для гамильтониана $\hat{H}=\int\limits_V \mathscr{H}(\vec{r})\,d\vec{r}$ перейдем к представлению вторичного квантования:

$$\hat{\varphi}(\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\left(\frac{c_0\hbar}{2\rho_0 k}\right)^{\frac{1}{2}}(\hat{a}^+_{-\vec{k}}+\hat{a}_{\vec{k}})\,e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

$$\hat{\rho}(\vec{r})=\rho_0+\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\left(\frac{\hbar\rho_0 k}{2c_0}\right)^{\frac{1}{2}}i(\hat{a}^+_{-\vec{k}}-\hat{a}_{\vec{k}})\,e^{-i\vec{k}\vec{r}}, \tag{4}$$

операторы рождения — уничтожения фононов подчинены известным коммутационным соотношениям (см. (3)): $[\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^+_{\vec{k}'}]=\Delta(\vec{k}-\vec{k}')$, $[\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}]=$ $=[\hat{a}^+_{\vec{k}}\hat{a}^+_{\vec{k}'}]=0$.

Тогда $\hat{H}_0=\int\limits_V \hat{H}_0(\vec{r})\,d\vec{r}$ описывает идеальную бозе-систему фононов с линейным спектром возбуждений $\varepsilon_0(\vec{k})=\hbar c_0|\vec{k}|=\hbar\omega_0(\vec{k})$ ($\vec{k}$—волновой вектор фонона):

$$\hat{\mathscr{H}}_0=\sum_{\vec{k}}\varepsilon_0(\vec{k})\left(\hat{a}^+_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}+\frac{1}{2}\right).$$

Основное состояние $|\Psi_0>$ определим как вакуум фононов $\hat{a}_{\vec{k}}|\Psi_0>=0$. Оставшиеся члены разложения (2) описывают взаимодействие фононов.

Основной вклад во взаимодействие дает член $\hat{H}_l=\int\limits_V \hat{\mathscr{H}}_1(\vec{r})\,d\vec{r}$, соответствующий кубическому ангармонизму, так как следующий член

$\widehat{H}_2 = \int\limits_V \widehat{\mathscr{H}}_2(\vec{r})\, d\vec{r}$, соответствующий взаимодействию с четырьмя фононами в вершинах, составляет $\left(\frac{\hbar k_{\max}}{c_0\rho_0 \cdot 1\, см^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ от вклада $\widehat{H}_I(k_{\max} \simeq 1 \mathring{A}^{-1}$ см. ниже).

Параметром разложения (2) можно считать $\lambda = \left(\frac{\hbar k_{\max}}{c_0\rho_0 \cdot 1\, см^3}\right)^{\frac{1}{2}}$, тогда $\widehat{H}_0 \sim \lambda^0$, $\frac{\widehat{H}_1 \sim \lambda}{\widehat{H}_2 \sim \lambda^2}$ и т. д.

Из (2) и (4) следует:

$$\widehat{H}_I = \sum_{\vec{k}\vec{q}} \{\Gamma_1(\vec{k}, \vec{q})(\widehat{a}^+_{\vec{k}-\vec{q}}\widehat{a}^+_{\vec{q}}\widehat{a}_{\vec{k}} - \widehat{a}^+_{\vec{k}}\widehat{a}_{\vec{q}}\widehat{a}_{\vec{k}-\vec{q}}) +$$
$$+ \Gamma_2(\vec{k}, \vec{q})(\widehat{a}^+_{\vec{k}-\vec{q}}\widehat{a}_{\vec{q}}\widehat{a}^+_{-\vec{k}} - \widehat{a}_{-\vec{k}}\widehat{a}_{\vec{q}}\widehat{a}_{\vec{k}-\vec{q}})\},$$

где (если учесть, что $\left(\frac{d}{d\rho}\frac{c^2}{\rho}\right)_{\rho_0} \simeq 5\frac{c_0^2}{\rho_0^2}$ [2, 4])

$$\Gamma_{1,2}(\vec{k}, \vec{q}) = \frac{i}{\sqrt{V}}\left(\frac{c_0\hbar^3}{2\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{(\vec{k}\vec{q})\,|\vec{k}-\vec{q}\,|}{kq}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{5}{12}(kq\,|\vec{k}-\vec{q}\,|)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{5}$$

Бозе-система фононов, описываемая гамильтонианом

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_I, \tag{6}$$

слабонеидеальна, так как взаимодействие $\widehat{H}_I$ достаточно мало: $\widehat{H}_I \sim \lambda \widehat{H}_0$, т. е. для определения спектра системы (6) можно применять методы теории возмущений для $T = 0°$K (см., например, [6]).

§ 2. Спектр взаимодействующих («одетых») фононов

Спектр неидеальной бозе-системы фононов (6) определяется полюсами полных функций Грина [6]

$$G^-(\vec{k}, t-t') = \frac{1}{i}\frac{\langle\Psi_0\,|\,T\widehat{a}_{\vec{k}}(t)\,\widehat{S}\,\widehat{a}^+_{\vec{k}}(t')\,|\,\Psi_0\rangle}{\langle\Psi_0\,|\,\widehat{S}\,|\,\Psi_0\rangle},$$
$$G^+(\vec{k}, t-t') = \frac{1}{i}\frac{\langle\Psi_0\,|\,T\widehat{a}^+_{\vec{k}}(t)\,\widehat{S}\,\widehat{a}_{\vec{k}}(t')\,|\,\Psi_0\rangle}{\langle\Psi_0\,|\,\widehat{S}\,|\,\Psi_0\rangle}, \tag{7}$$

в энергетическом представлении — $G^{\mp}(\vec{k}, \omega)$, которые определяются Фурье-преобразованием

$$G^{\mp}(\vec{k}, t-t') = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega(t-t')}G^{\mp}(\vec{k}, \omega)\, d\omega. \tag{8}$$

Операторы рождения—уничтожения взяты в представлении взаимодействия

$$\hat{a}_{\vec{k}}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{a}_{\vec{k}}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}, \quad \hat{a}^{+}_{\vec{k}}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{a}^{+}_{\vec{k}}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t},$$

а $\hat{S}$-матрица определяется выражением

$$\hat{S} = T\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{H}_{int}(t)\,dt\right) = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int \hat{S}_n(t_1\ldots t_n)\,dt_1\ldots dt_n,$$

где $\hat{H}_{int}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{H}_I e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}$ и T — оператор Дайсона хронологического упорядочения. Разложение S-матрицы по теореме Вика приводит к уравнению Дайсона для полных функций Грина [6.7]:

$$G^{\mp}(\vec{k}, t-t') = G_0^{\mp}(k, t-t') + \int dt_1\,dt_2 G_0^{\mp}(\vec{k}, t-t_1)\,M(\vec{k}, t_1-t_2)\,G^{\mp}(\vec{k}, t_2-t'), \tag{9}$$

где $G_0^{\mp}(\vec{k}, t-t')$ — функции Грина «голых» фононов:

$$G_0^{-}(\vec{k}, t-t') = \frac{1}{i}\langle\Psi_0|T\hat{a}_{\vec{k}}(t)\,\hat{a}^{+}_{\vec{k}}(t')|\Psi_0\rangle,$$

$$G_0^{+}(\vec{k}, t-t') = \frac{1}{i}\langle\Psi_0|T\hat{a}^{+}_{\vec{k}}(t)\,\hat{a}_{\vec{k}}(t')|\Psi_0\rangle,$$

а $M(\vec{k}, t_1-t_2)$ — полный массовый оператор [7].

Для Фурье-образа $G^{-}(\vec{k}, \omega)$ (см. (8)) уравнение (9) имеет простое решение

$$G^{-}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(G_0^{-}(\vec{k}, \omega))^{-1} - M(\vec{k}, \omega)}, \tag{10}$$

$$G_0^{-}(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \omega_0(\vec{k}) + i\delta}, \tag{11}$$

т. е. массовый оператор определяет изменения спектра фононов в результате взаимодействия.

При вычислении $M(\vec{k}, \omega)$ по теории возмущений ограничимся суммой всех собственно энергетических частей во втором порядке $\sim\hat{S}_2$:

$$\hat{S}_2(t_1, t_2) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 T(\hat{H}_{int}(t_1)\,\hat{H}_{int}(t_2)),$$

которые получаются из $\hat{S}_2$ с помощью спариваний $\hat{a}_{\vec{k}}(t)\,\hat{a}^{+}_{\vec{k}}(t') = iG_0^{-}(\vec{k}, t-t')$ и $\hat{a}^{+}_{\vec{k}}(t)\,\hat{a}_{\vec{k}}(t') = iG_0^{+}(\vec{k}, t-t')$ (см. рисунок). Вклады в массовый оператор, которые вычисляются с помощью соответствующей диаграммной техники (см. [10]), дают диагональные члены. Диаграммы (a) и ($б$) дают вклад

$$m_1(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\hbar^2}\sum_q \frac{|\Gamma_1(\vec{k}, \vec{q})|^2 + 3|\Gamma_2(\vec{k}, \vec{q})|^2}{\omega - \omega_0(\vec{q}) - \omega_0(\vec{k}-\vec{q})}, \tag{12}$$

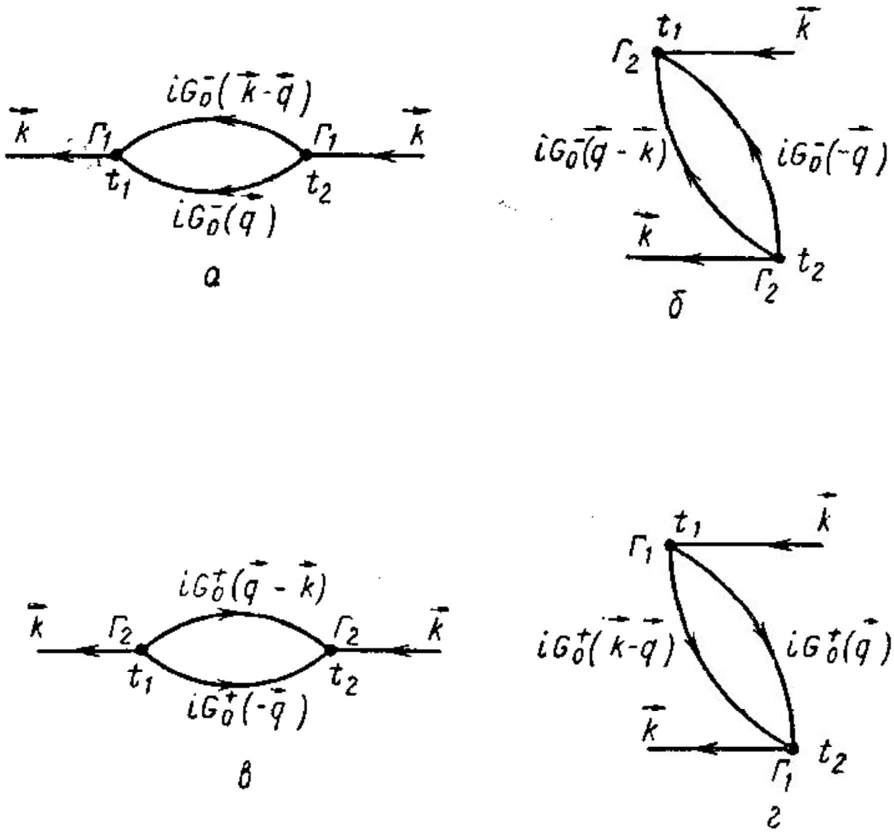
диаграммы (*в*), (*г*) дают вклад

$$m_2(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\vec{q}} \frac{|\Gamma_1(\vec{k}, \vec{q})|^2 + 3|\Gamma_2(\vec{k}, \vec{q})|^2}{\omega + \omega_0(\vec{q}) + \omega_0(\vec{k} - \vec{q})}. \tag{13}$$

Диаграммы (*а*), (*в*) дают по два вклада, а диаграммы (*б*) и (*г*) соответствуют шести одинаковым вкладам каждая. Из (10) и (11) получим уравнение для полюсов полной функции Грина во втором порядке:

$$\omega(\vec{k}) = \omega_0(\vec{k}) + m_1(\vec{k}, \omega(\vec{k})) + m_2(\vec{k}, \omega(\vec{k})). \tag{14}$$

Переходя по обычным правилам в выражениях (12), (13) к интегрированию, нетрудно убедиться, что интегралы расходятся при больших импульсах $\hbar q$ виртуального фонона, поэтому необходимо ввести



обрезание на некотором максимальном волновом векторе $k_{\max}$. Ограничение на импульсы фононов возникает вполне естественно, если учесть гидродинамическую природу фононов [8], тогда $k_{\max} \leqslant \frac{\pi}{a}$, где $a \simeq 3{,}6$ Å среднее расстояние между атомами жидкого гелия [9]. Выражения (12), (13) тогда принимают вид

$$m_{1,2}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{32} \frac{\hbar c_0}{(2\pi)^2 \rho_0} \int_{-1}^{+1} d\lambda \int_0^{k_{\max}} dq \left[\left(\lambda + \frac{5}{3}\right)^2 + 3\left(\lambda - \frac{5}{3}\right)^2\right] \times$$
$$\times \frac{kq^3 \sqrt{k^2 + q^2 - 2kq\lambda}}{\pm\omega - c_0 q - c_0 \sqrt{k^2 + q^2 - 2kq\lambda}}, \tag{15}$$

где $\lambda = \cos(\widehat{\vec{k}\vec{q}})$.

Из свойства вершин $\Gamma_{1,2}(\vec{k}, \vec{q})$ обращаться в нуль при нулевом внешнем импульсе сразу следует, что массовый оператор $M(\vec{k}, \omega)$, вычисленный в любом порядке теории возмущений, также обращается в нуль при $k=0$, т. е. щель в спектре фононов при учете взаимодействия не возникает во всех приближениях. Поэтому решение уравнения (14) (где $m_1(\vec{k}, \omega)+m_2(\vec{k}, \omega)$ — массовый оператор во втором порядке теории возмущений) определяется с помощью (15):

$$\omega(\vec{k}) = \omega_0(\vec{k})(1+\psi(k)). \tag{16}$$

Предполагая, что отклонение от спектра «голых» фононов мало, и учитывая, что подынтегральное выражение суммы $m_1(\vec{k}, \omega)+m_2(\vec{k}, \omega)$ (см. (15)) имеет острый максимум при малых углах $\theta=\widehat{\vec{k}\vec{q}}$, можно вычислить массовый оператор m_1+m_2 в приближениях $k\sim k_{\max}$ и $k\ll k_{\max}$. Решая уравнение (14) при $k\sim k_{\max}$, получим

$$\psi(\vec{k}) \simeq -\frac{63}{640}\frac{\hbar k_{\max}^4}{(2\pi)^2\rho_0 c_0} - \frac{1}{c_0}\left(\frac{1}{143}\frac{\hbar c_0}{(2\pi)^2\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} k^2 \tag{17}$$

т. е. $\omega(\vec{k}) = c_{ren}k - Ak^3$ (см. (1)), где перенормированная скорость фононов $c_{ren} = c_0 - \frac{63}{640}\frac{\hbar k_{\max}^4}{(2\pi)^2\rho_0}$ и $A = \left(\frac{1}{143}\frac{\hbar c_0}{(2\pi)^2\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$. Соответствующее решение при $k\ll k_{\max}$ имеет вид $\psi(\vec{k}) \simeq -\frac{63}{640}\frac{\hbar k_{\max}^4}{(2\pi)^2\rho_0 c_0}$, т. е. согласуется с (17).

§ 3. Заключительные замечания

Таким образом, в выражении для энергии «одетого» фонона $\varepsilon(\vec{k}) = \hbar\omega(\vec{k})$ кроме перенормировки скорости $c_{ren}<c_0$ появляется дисперсия (отклонение от линейного закона), причем $\frac{d^2\varepsilon(k)}{dk^2} \leqslant 0$, т. е. неидеальный бозе-газ фононов в жидком гелии имеет устойчивый спектр: однофононное состояние стабильно.

Этот факт подтверждается экспериментами [1], в которых наблюдаются именно перенормированные фононы ($c=c_{ren}$) и является существенным для устранения расходимостей из матричных элементов рассеяния фононов на фононах при вычислении, например, вязкости гелия (см. [2, 3, 4]).

Коэффициенты c_0 и A определяются величиной параметра обрезания $k_{\max}$, единственным критерием для выбора которого является эксперимент. Так, при выборе $k_{\max}\simeq 0{,}8\,\text{Å}^{-1}$ спектр (16) находится в хорошем согласии с экспериментальной кривой в фононной ее части [1]:

$$c_0 - c_{ren} \simeq 6{,}5\cdot 10^2\ \textit{см/сек}\ (c_{ren} \simeq 2{,}37\cdot 10^4\ \textit{см/сек},$$

$$\rho_0 \simeq 0{,}15\ \textit{г}\cdot\textit{см}^{-3})\ \text{и}\ A \simeq 1{,}8\cdot 10^{-13}\ \textit{см}^3\,\textit{сек}^{-1}.$$

Принципиально параметр $k_{\max}$ может быть определен из экспериментов по независимому измерению $c_0 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_0}^{\frac{1}{2}}$ из упругих свойств гелия [9] (P — давление) и $c_{теп}$ — из нейтронографических данных [1]. Однако надежные данные о c_0 при нормальном давлении и температурах, близких к абсолютному нулю, отсутствуют.

Самостоятельный интерес представляет зависимость спектра реальных фононов в гелии от температуры, которая отмечается в экспериментальных данных [11].

В заключение автор выражает признательность доц. И. А. Квасникову за интерес к работе и полезные обсуждения, а также проф. Я. П. Терлецкому, под чьим общим руководством была выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Henshaw D., Woods A. Phys. Rev., **121**, 1266, 1961.
2. Ландау Л. Д., Халатников И. М. ЖЭТФ, **19**, 637, 1949.
3. Халатников И. М. ЖЭТФ, **20**, 243, 1950.
4. Халатников И. М. Введение в теорию сверхтекучести. М., «Наука», 1965.
5. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, **11**, 592, 1941.
6. Абрикосов А., Горьков А., Дзялошинский И. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., Физматгиз, 1962.
7. Пайнс Д. Проблема многих тел. М., ИЛ, 1963.
8. Питаевский Л. ЖЭТФ, **31**, 536, 1956.
9. Кеезом В. Гелий. М., ИЛ, 1949.
10. Загребнов В. Дипломная работа. МГУ, 1969.
11. Yarnell J., Arnold G., Bendt P., Kerr E. Phys. Rev., **113**, 1379, 1959.

Поступила в редакцию
19.3 1970 г.

Кафедра
теоретической физики