Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1971

УДК 531.391

А. Н. ЛАГУТКИН, К. К. ЛИХАРЕВ

К ТЕОРИИ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ, ОБЛАДАЮЩИМИ РЕЗКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Предлагается способ составления укороченных уравнений для колебательных систем, содержащих нелинейные элементы, характеристики которых аппроксимируются ломаными кривыми. Способ основан на приближенном нахождении моментов достижения точек «перелома».

При исследовании колебательных процессов в нелинейных системах методом медленно меняющихся амплитуд обычно предполагают, что характеристики нелинейных элементов имеют достаточно плавный характер. Тогда их можно аппроксимировать, ограничиваясь несколькими членами ряда Тейлора (см., например, [1]).

Однако в случае использования резко изменяющихся нелинейностей такая аппроксимация становится несправедливой. Резкость здесь понимается в том смысле, что характерная величина изменения аргумента нелинейной зависимости, при которой нелинейность сильно меняет значение, много меньше величины колебаний. Таковы, например, при большом сигнале вольткулоновые характеристики диода с обратным градиентом концентрации (ОГК), контакта металл-диэлектрик-полупроводник (МДП) [2], вольтамперная характеристика диода и т. д. В этом случае нелинейность хорошо аппроксимировать отрезками ломаных кривых, например, отрезками полиномов.

Однако непосредственное применение метода медленно меняющихся амплитуд при такой аппроксимации затруднительно ввиду того, что в процессе составления укороченных уравнений приходится вычислять интегралы типа

$$f_{\begin{Bmatrix} sk \\ ck \end{Bmatrix}} \to \sum_{n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_n(x) \begin{Bmatrix} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \\ \cos(\omega_k t + \varphi_k) \end{Bmatrix} dt. \qquad (1)$$

Здесь $f_n(x)$ — n-ный полином, аппроксимирующий характеристику нелинейного элемента $f(x)$ (рис. 1), $x = x_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$ представляет собой квазигармонический колебательный процесс. Точки t_n показывают времена достижения величиной x уровня n-ной точки перелома x_n (рис. 1) и являются корнями алгебраического уравнения

$$x \equiv \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) + x_0 = x_n. \qquad (2)$$

Таким образом, для того чтобы получить укороченные уравнения, описывающие поведение системы, вначале необходимо определить времена t_n, т. е. решить алгебраическое уравнение (2) относительно t_n. После определения t_n уже легко вычислить интегралы (1), и, следовательно, получить укороченные уравнения. В работе [3] было предложено вычислять интегралы типа (1), используя метод модуляционных характеристик [4]. Однако этот метод приводит к исключительно сложным выкладкам, которые удается провести лишь для частных случаев на ЭВМ.

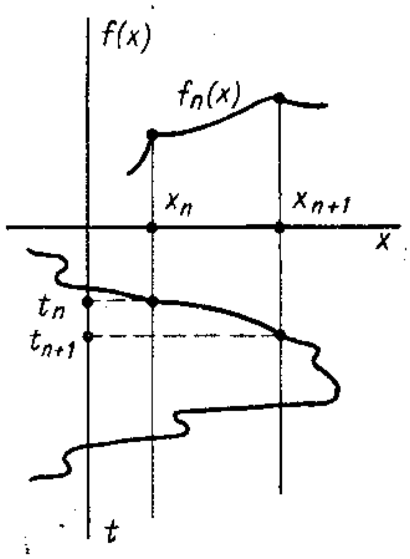

Рис. 1

В настоящей работе предлагается способ приближенного нахождения времен t_n, что позволяет составить укороченные уравнения.

Будем предполагать, что решение уравнения (2) можно представить в виде ряда по степеням некоторого малого параметра μ:

$$t_n = t_{no} + \sum_{m=1}^{\infty} T_{mn}\mu^m. \qquad (3)$$

Это предположение говорит о малом отклонении времен t_n относительно их «невозмущенных» значений t_{n0}. Выбор малого параметра определяется условиями конкретной задачи. Для того чтобы найти T_{mn}, необходимо решение, записанное в виде (3), подставить в уравнение (2), приравнять нулю коэффициент при члене, пропорциональном μ^m, и из полученного уравнения найти T_{mn}.

Ввиду того что решение уравнения (2) не связано с видом функций f_n, то один раз найденные значения t_n позволяют рассматривать системы с резкими нелинейностями любого вида. При этом значения t_n будут выражаться через параметры колебательного процесса x $(A_m, \omega_m, \varphi_m, x_0)$ и величины x_n.

В качестве примера рассмотрим одночастотный параметрический генератор, в котором нелинейным элементом является емкость, имеющая одну точку «перелома» для случая параллельного включения генератора накачки. Укороченные уравнения для такого генератора неоднократно выводились (см., например, [1]). В нем на нелинейный элемент действует сумма напряжений накачки и возбудившейся субгармоники, и для нахождения моментов достижения напряжением уровня перелома необходимо решить уравнение типа (2):

$$u \equiv A_н \cos(\omega_н t + \varphi_н) + A\cos(\omega_н t/2 + \varphi) = V_0. \qquad (4)$$

Здесь $A_н$, A — амплитуды накачки и возбудившейся субгармоники, $\omega_н$, $\varphi_н$ — частота и фаза накачки, φ — фаза генерируемой субгармоники, V_0 — расстояние от рабочей точки до точки перелома.

Рассмотрим два крайних случая. В первом случае возбудившиеся колебания малы по сравнению с накачкой: $A_н \gg A$ (это справедливо, например, при рассмотрении процессов возбуждения), во втором — амплитуда возбудившихся колебаний намного превосходит амплитуду накачки ($A \gg A_н$). В связи с этим для первого случая вводим параметр малости $\mu_1 = A/A_н$, для второго случая параметр, обратный μ_1: $\mu_2 = A_н/A$. Решение уравнения (4) ищется в виде степенного ряда (3), соответственно по μ_1 или μ_2.

В первом случае уравнение (4) приводим к виду $\cos 2y + \mu_1 \cos(y - \alpha/2) = a$, где $a = V_0/A_н$, $\alpha = \varphi_н - 2\varphi$. Ввиду того что $A_н \gg A$, на длине 2π по фазе $(\omega_н t/2 + \varphi)$ есть четыре точки пересечения. Решив уравнение (4) с точностью до членов $\sim \mu_1^3$, получаем:

$$y = y_0 + \mu_1 \frac{\cos(y_0 - \alpha/2)}{2\sin 2y_0} - \mu_1^2 \frac{a + \cos\alpha}{8\sin^3 2y_0} + \mu_1^3 \left[\frac{a^2 + a\cos\alpha}{8\sin^5 2y_0} \cos(y_0 - \alpha/2) + \right.$$
$$\left. + \frac{a + \cos\alpha}{8(1 - a^2)^2} \sin(y_0 - \alpha/2) + \frac{1}{48} \frac{\cos^3(y_0 - \alpha/2)}{\sin^3 2y_0} \right]. \quad (5)$$

Здесь $y_0 = (-1)^k \frac{1}{2} \arccos a$ при $k = 1, 2$; $y_0 = (-1)^k \frac{1}{2} \arccos a + \pi$ при $k = 3,4$. Отсюда уже легко найти значения полных фаз гармоник в моменты достижения напряжением u уровня излома V_0.

Во втором случае ввиду того, что $A \gg A_н$, на длине 2π по фазе $(\omega_н t/2 + \varphi)$ есть только две точки пересечения. Уравнение (4) приводится к виду $\cos y + \mu_2 \cos(2y + \alpha) = a\mu_2$ и решается с точностью до членов $\sim \mu_2^2$. Тогда получаются выражения

$$y_k = (-1)^k \frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1} (\cos\alpha + a)\mu_2 - \mu_2^2 (\sin 2\alpha + 2a \sin\alpha), \quad k = 1, 2. \quad (6)$$

Для примера рассмотрим случай, когда нелинейная часть вольт-кулоновой характеристики емкости имеет следующий вид:

$$\tilde{q}(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < V_0, \\ \sigma(u - V_0)^2 & \text{при } u > V_0. \end{cases} \quad (7)$$

Область возбуждения в координатах $A_н/|V_0|$ и ξ при отсутствии диссипации в системе изображена на рис. 2, *а* (если затухание отлично от нуля, то область возбуждения несколько «сглаживается»). Наклон влево обусловлен расстроечными эффектами [1], соответствующая скелетная кривая показана на том же рисунке пунктиром. Видно, что когда точка перелома не достигается ($A_н/|V_0| < 1$), границы области возбуждения идут как в обычной линейной параметрической системе (кривые, показанные штрих-пунктиром).

Заметим, что условие возбуждения колебаний можно получить также обычным методом малого сигнала, т. е., считая, что в системе есть емкость, которая меняется с частотой накачки. Как и следовало ожидать, при применении нашего способа для условия возбуждения получается то же выражение.

При рассмотрении стационарного режима колебаний амплитуда возбудившейся субгармоники может быть как меньше амплитуды накачки, так и больше. На рис. 2, *б* показана зависимость стационарной амплитуды для случая $A \ll A_н$ (просто линии) и для случая $A \gg A_н$

(штрих-пунктир). Из этого рисунка видно, что амплитудные кривые для предельных случаев легко «сшиваются» (кривые сшивки показаны на рис. 2, *б* пунктиром). Максимальная ошибка определения амплитуды порядка 5%. Таким образом, фактически можно определять величину стационарной амплитуды для любых соотношений A и $A_н$.

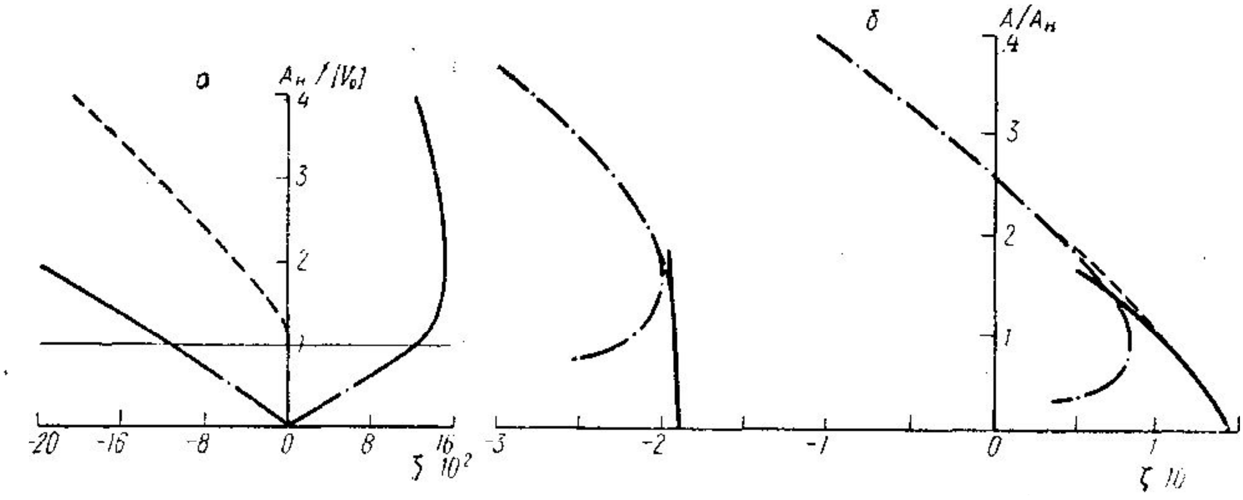

Рис. 2. Зависимости характеристик одночастотного параметрического генератора от величины расстройки частоты генерации $\omega_н/2$ относительно собственной частоты системы $\xi=(\omega_н/2\Omega)^2-1$. *а* — область возбуждения, *б* — амплитуда стационарных колебаний $\sigma|V_0|/\pi C=0{,}04$ (C — постоянная емкость системы)

В заключение отметим, что предложенный метод нахождения времен t_n позволяет анализировать процессы и в двухчастотных параметрических генераторах, в частности, явление автосинхронизации [1] с учетом активных токов через диод.

Авторы благодарны В. В. Мигулину за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. М., «Советское радио», 1966.
2. Берман А. С. Нелинейная емкость полупроводников. М., Физматгиз, 1963.
3. Патрикеев Л. Н., Попов В. Д. «Изв. вузов», радиоэлектроника, **10**, № 6, 604—607, 1967.
4. Бруевич А. Н., Евтянов С. И. Аппроксимация нелинейных характеристик и спектры при гармоническом воздействии. М., «Советское радио», 1965.

Поступила в редакцию
27.3 1970 г.

Кафедра
физики колебаний