Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1971

УДК 62—50

Г. А. БЕНДРИКОВ, А. М. ГРИГОРЬЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПАРАМЕТРАМ МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

В работе описывается метод оценки различных параметров линейной системы с точки зрения их влияния на устойчивость.

После решения задачи синтеза системы регулирования и определения необходимых значений параметров всегда возникает вопрос о том, с какой степенью точности должны выдерживаться значения параметров при технической реализации системы и в процессе ее эксплуатации. Первым и наиболее важным требованием, ограничивающим область возможного изменения параметров, является требование устойчивости системы.

Пусть характеристическое уравнение непрерывной линейной системы регулирования имеет вид

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_l^0)\, p^i = 0, \tag{1}$$

где $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_l^0$ — фиксированные значения некоторых параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Если $p_i = \delta_i + j\omega_i$ — решения уравнения (1), то необходимым и достаточным условием устойчивости является неравенство $\delta_i < 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Для выяснения факта устойчивости системы можно применить к уравнению (1) (или к передаточной функции) какой-либо из известных критериев устойчивости. Однако если некоторые (или все) параметры системы могут отклоняться от своего номинального значения под влиянием тех или иных факторов, то всегда имеется опасность потери устойчивости в процессе работы системы. Очевидно, что в этом случае необходимо исследовать влияние изменения параметров на устойчивость во всем диапазоне возможного изменения параметров.

На первый взгляд кажется, что наибольшую опасность с точки зрения потери устойчивости представляют корни, расположенные ближе других к мнимой оси плоскости комплексного переменного p. Следовательно, тенденция системы к потери устойчивости определяется ее степенью устойчивости, т. е. расстоянием до мнимой оси ближайшего действительного корня или ближайшей пары комплексносопряженных корней. Однако такое рассуждение является неверным.

Действительно, может оказаться, что при изменении интересующего нас параметра ближайшие к мнимой оси корни удаляются от нее и, наоборот, корни, далекие от мнимой оси, выходят на мнимую ось, и система теряет устойчивость. Поэтому имеет смысл связывать исследование устойчивости с величиной и знаком изменения параметра и оценивать запас устойчивости по параметру. Под запасом устойчивости по параметру α_k понимается разность $\alpha_k^{kp} - \alpha_k^0$, где α_k^{kp} — значение параметра, соответствующее границе устойчивости.

Если параметры α_k входят в коэффициенты характеристического уравнения линейно, то указанное выше исследование удобно проводить, используя метод траекторий корней [1]. Пусть характеристическое уравнение системы записано в виде

$$\Phi_n(p) + \alpha_k \Psi_m(p) = 0, \tag{2}$$

где $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ — полиномы степеней n и m соответственно. При $\alpha_k = \alpha_k^0$ это уравнение совпадает с уравнением (1), и его корни можно считать известными. Воспользуемся теоремой метода траекторий корней о переносе начальных точек [1] и перепишем (2) в виде

$$\widetilde{\Phi}_n(p) + \widetilde{\alpha}_k \Psi_m(p) = 0, \tag{3}$$

где

$$\widetilde{\Phi}_n(p) = \Phi_n(p) + \alpha_k^0 \Psi_m(p),$$

$$\widetilde{\alpha}_k = \alpha_k - \alpha_k^0.$$

Следовательно, корни уравнения (2) при $a_k = \alpha_k^0$ или, что то же самое, корни уравнения (1) являются начальными точками уравнения (3). Увеличение параметра α_k от его номинального значения α_k^0 будет соответствовать нечетным траекториям корней уравнения (3), а уменьшение — четным траекториям.

Приближенное построение траекторий корней уравнения (3) позволяет выяснить, является ли параметр α_k опасным с точки зрения потери устойчивости. Применяя затем точное построение или используя аналитический метод траекторий корней [1], можно определить запас устойчивости по параметру α_k как в сторону его увеличения от значения α_k^0, так и в сторону уменьшения. Подобное исследование можно провести по отношению ко всем линейно-входящим в коэффициенты уравнения (1) параметрам.

Следует отметить, что запас устойчивости по параметру зависит не только от исходного значения параметра α_k^0, но и от асимптотического порядка уравнения (3) $(n-m)$ относительно этого параметра, т. е. от класса системы $[n, m]$. Очевидно, что термин «класс системы» имеет смысл только в связи с параметром, относительно которого этот класс определяется.

Рассмотрим примеры. На рис. 1 представлена блок-схема системы автоматического регулирования скорости вращения гидротурбины [2]. На этом рисунке введены следующие обозначения: W_0 — передаточная функция объекта регулирования, W_1 — передаточная функция центробежного маятника, W_2 — передаточная функция вспомогательного сервомеханизма, W_3 — передаточная функция гидравлического серводвигателя, Z_1 — передаточная функция изодрома.

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$k_0k_1k_2k_3(T_5p+1)+k_2k_3k_4(T_4p+1)(T_1^2p^2+2T_1\xi_1p+1)(T_0p+1)+$$
$$+p(T_5p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)(T_0p+1)(T_1^2p^2+2T_1\xi_1p+1)=0. \quad (4)$$

Подставляя в характеристическое уравнение (4) значения параметров, принятые в [2]: $\rho=k_0k_1=54{,}6$; $k_2=1{,}0$; $k_3=3{,}75$; $k_4=0{,}97$; $\xi_1=1{,}025$; $T_0=8$ *сек*; $T_1=0{,}5$ *сек*; $T_2=0{,}25$ *сек*; $T_3=0{,}05$ *сек*; $T_4=20$ *сек*; $T_5=7$ *сек*, получим характеристическое уравнение для номинальных значений параметров

$$\widetilde{\Phi}_n(p)=0{,}175p^7+4{,}964p^6+33{,}240p^5+228{,}338p^4+$$
$$+698{,}457p^3+703{,}631p^2+1539{,}828p+208{,}387=0. \quad (5)$$

Корни уравнения (5) равны соответственно: $p_1=-0{,}143$; $p_2=-3{,}752$; $p_3=-22{,}084$; $p_{4,5}=-0{,}0625\pm j\,1{,}611$; $p_{6,7}=-1{,}129\pm j\,6{,}103$. Эти значения на плоскости комплексного переменного $p=\delta+j\omega$ представлены на рис. 2 и 3 крестиками и в соответствии с уравнением (3) являются начальными точками траекторий корней характеристического уравнения при изменении любого из параметров от номинального значения в обе стороны. (На рис. 2 и 3 изображена только верхняя полуплоскость плоскости p.)

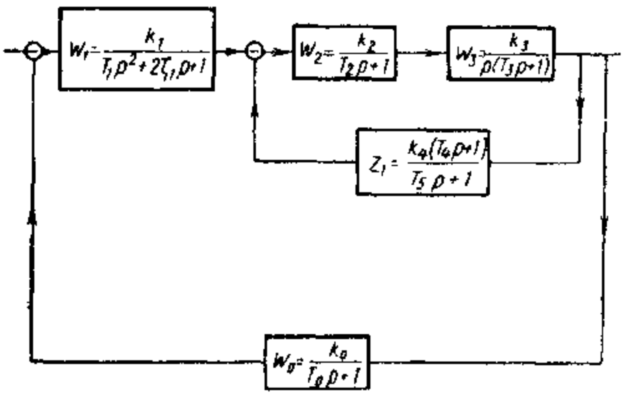

Рис. 1

Нас интересует запас устойчивости по параметру T_4. Тогда в характеристическом уравнении, записанном в форме (3), имеем

$$\Psi_m(p)=3{,}6375p(2p^3+8{,}45p^2+9{,}025p+1),$$
$$\widetilde{\alpha}_k=\widetilde{T}_4=T_4-20. \quad (6)$$

Корни полинома $\Psi_m(p)$, или предельные точки уравнения (4) при изменении параметра T_4 (или $\widetilde{T}_4$) равны $z_1=0$; $z_2=-0{,}125$; $z_3=-1{,}64$; $z_4=-2{,}58$. Эти значения отмечены на рис. 2 кружочками. На рис. 2 показан ход траекторий корней уравнения (4) при изменении $\widetilde{T}_4$ в

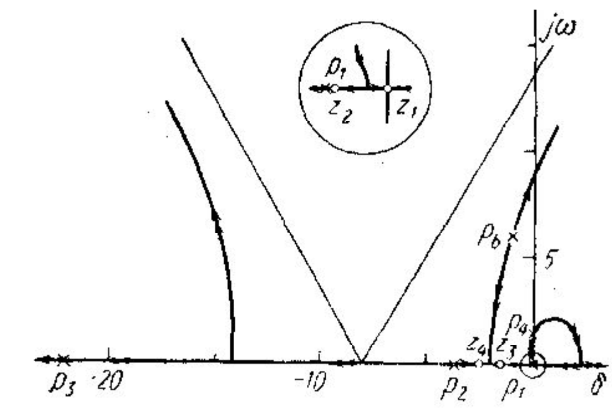

Рис. 2

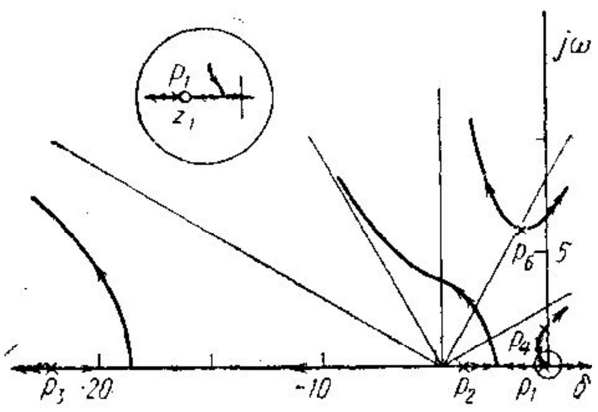

Рис. 3

пределах $-\infty<\widetilde{T}_4<\infty$, причем, как обычно, движение корней при изменении параметра в положительном направлении обозначено одной стрелкой и в отрицательном направлении — двумя стрелками. Из рисунка видно, что при увеличении параметра от его номинального значения опасность с точки зрения потери устойчивости представляет корень p_6, а при уменьшении параметра — корень p_4.

Применяя аналитический метод траекторий корней, получим, что система теряет устойчивость при $\widetilde{T}_4^{kp} = -13{,}47$ *сек* на частоте $\omega_1 = 1{,}68$ 1/*сек* и при $\widetilde{T}_4^{kp} = 26{,}61$ *сек* на частоте $\omega_2 = 9{,}16$ 1/*сек*. Таким образом, запас устойчивости исследуемой системы по параметру T_4 равен $+26{,}61$ *сек* в сторону увеличения параметра и $-13{,}47$ *сек* в сторону уменьшения. Допустимый диапазон изменения параметра $6{,}53 < T_4 < 46{,}61$.

Рассмотрим в этой же системе запас устойчивости по параметру $\rho = k_0 k_1$. Номинальное значение параметра $\rho_0 = 54{,}6$. Записывая исходное характеристическое уравнение в форме (3), получим

$$\Psi_m(p) = 3{,}75\,(7p + 1), \quad \widetilde{\alpha}_k = \widetilde{\rho} = \rho - 54{,}6. \tag{7}$$

Имеем единственную предельную точку при изменении параметра $\widetilde{\rho}$, которая равна $z_1 = -\frac{1}{7}$ (см. рис. 3). На рис. 3 изображены траектории корней уравнения (4) при изменении $\widetilde{\rho}$ в бесконечных пределах. Ориентировочный вывод из картины траекторий состоит в том, что опасность с точки зрения потери устойчивости представляют корни p_4 при увеличении параметра и p_4 и p_6 при уменьшении. После точного расчета получаем, что критические значения параметра и соответствующие им частоты возбуждения равны:

$$\widetilde{\rho}_1^{kp} = -55{,}67; \quad \omega_1 = 0; \quad \widetilde{\rho}_2^{kp} = 8{,}24; \quad \omega_2 = 1\,704 \ 1/\textit{сек};$$

$$\widetilde{\rho}_3^{kp} = -191{,}08; \quad \omega_3 = 6{,}51 \ 1/\textit{сек}.$$

Очевидно, что рассматривать значение $\widetilde{\rho}_3^{kp}$ не имеет смысла, так как при уменьшении $\widetilde{\rho}$ возбуждение произойдет уже при значении $\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}_1^{kp}$. Поскольку значение параметра ρ не может быть отрицательным, то допустимое изменение этого параметра при его уменьшении равно не $\widetilde{\rho}_1^{kp} = -55{,}67$, а номинальному зничению параметра, взятому с обратным знаком, т. е. $-54{,}6$. Запас устойчивости по параметру ρ при его увеличении от номинального значения равен $+8{,}24$. Допустимая область изменения параметра $0 < \rho < 62{,}84$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
2. Теория автоматического регулирования. Под ред. В. В. Солодовникова, книга 1. М., «Машгиз», 1967.

Поступила в редакцию
31.3 1970 г.

Кафедра
физики колебаний