Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1971

УДК 530.12:531.51

В. С. БРЕЖНЕВ, Н. И. МАКСЮКОВ

ДВИЖЕНИЕ ПРОБНОЙ ЧАСТИЦЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СЖАТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

Как показали последние исследования Дикке [1], Солнце не является точным сфероидом, а обладает сплюснутостью $5\cdot10^{-5}$. Это обстоятельство приводит к изменению гравитационного потенциала Солнца и должно сказываться на движении планет. В настоящей работе предполагается, что Солнце имеет форму сжатого эллипсоида вращения и для простоты считается однородным. При этих предположениях в отличие от результата Дикке, который получен им в рамках скалярной теории гравитации [1], на основе релятивистской теории тяготения Эйнштейна исследуется влияние сплюснутости Солнца на движение отдельной планеты в плоскости эклиптики.

Метрику, описывающую гравитационное поле невращающегося тела, обладающего аксиальной симметрией [2], можно записать в следующем виде:

$$ds^2 = e^{2\lambda}(dx^4)^2 - r^2e^{2\lambda}d\varphi^2 - e^{2(\lambda-\nu)}(dr^2+dz^2). \qquad (1)$$

Если потребовать, чтобы удовлетворялась полная система уравнений поля в вакууме $R_{ij}=0$, то получаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial r}=r\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right]; \quad \frac{\partial\nu}{\partial z}=2r\frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial\lambda}{\partial z}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2}+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=0. \qquad (4)$$

При этом если уравнение (2) удовлетворяется, то уравнение (3) интегрируемо, а (4) представляет собой следствие двух первых уравнений.

Таким образом, в любой области Ω, в которой справедливы уравнения поля для вакуума, поле можно вычислить так: выбирается в качестве λ любое решение уравнения (2), а ν определяется по формуле [2]

$$\nu=\int\limits_{(\Omega)} r\left\{\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right]dr\right\}+2r\frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial\lambda}{\partial z}dz. \qquad (5)$$

Уравнение (2) — это уравнение Лапласа в цилиндрических координатах (r, φ, z) в евклидовом трехмерном пространстве для функции, не зависящей от φ.

Решением уравнения (2) является функция [3]

$$\lambda = \frac{3fm}{2c^2eb}\left\{\operatorname{arctg}(eu) + \frac{x^2+y^2}{2e^2b^2}\left[\frac{eu}{1+e^2u^2} - \operatorname{arctg}(eu)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{z^2}{e^2b^2}\left[\operatorname{arctg}(eu) - eu\right]\right\}, \qquad (6)$$

где f — постоянная тяготения, c — скорость света, e — эксцентриситет Солнца, m — масса Солнца, b — одна из полуосей Солнца. Эта функция описывает внешнее гравитационное поле однородного сжатого эллипсоида вращения.

При этом u определяется из уравнения

$$\frac{x^2+y^2}{1+e^2u^2} + z^2 = \frac{b^2}{u^2}. \qquad (7)$$

Производя замену переменных в (6) и (7):

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = R\cos\theta,$$

из (7) находим u с точностью до членов порядка квадрата эксцентриситета. Затем, разлагая λ по степеням эксцентриситета (считая его малым параметром), ограничиваясь при этом вторыми степенями e, получим

$$\lambda = \frac{fm}{c^2}\left(\frac{1}{R} + \frac{e^2b^2}{R^3}\right). \qquad (8)$$

Из условия, что на бесконечности метрика должна быть метрикой Шварцшильда, следует

$$e^{2\lambda}|_{R\to\infty} = 1 - 2\lambda.$$

В приближении, в котором проводится исследование $\lambda \sim \frac{1}{c_2}$, а $\nu \sim 0\left(\frac{1}{c^4}\right)$, следовательно, метрика имеет вид

$$dS^2 = (1-2\lambda)(dx^4)^2 - (1+2\lambda)\left[dR^2 + R^2d\varphi^2\right]. \qquad (9)$$

Вводя новую радиальную координату $\bar{r}$ посредством соотношения $R^2(1 + 2\lambda) = \bar{r}^2$, преобразуем метрику к виду

$$dS^2 = (1-2\lambda)(dx^4)^2 - (1+2\bar{\lambda})\,d\bar{r}^2 - \bar{r}^2d\varphi^2, \qquad (10)$$

где

$$\lambda = \frac{fm}{c^2}\left(\frac{1}{\bar{r}} + \frac{e^2b^2}{10\bar{r}^3}\right), \quad \bar{\lambda} = \frac{fm}{c^2}\left(\frac{1}{\bar{r}} + \frac{3e^2b^2}{10\bar{r}^3}\right).$$

Движение частиц в ОТО описывается уравнениями геодезических линий

$$\frac{d}{dS}\left(g_{ii}\frac{dx^i}{dS}\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i}\left(\frac{dx^j}{dS}\right)^2 = 0. \qquad (11)$$

Из (11) для $i = 4,3$ получаются следующие интегралы движения:

$$(1-2\lambda)\frac{\partial x^4}{dS} = k, \qquad (12) \qquad\qquad \bar{r}^2\frac{d\varphi}{dS} = \frac{h_1}{c} = h, \qquad (13)$$

где k — интеграл энергии, а h — интеграл момента количества движения.

Первым интегралом геодезических уравнений является

$$(1-2\lambda)\left(\frac{dx^4}{dS}\right)^2-(1+2\bar{\lambda})\left(\frac{d\bar{r}}{dS}\right)^2-\bar{r}^2\left(\frac{d\varphi}{dS}\right)^2=1. \qquad (14)$$

Подставляя вместо $\frac{dx^4}{dS}$ его значение из (12) в уравнение (14) и умножая (14) на $\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)^2$, получим

$$\frac{1}{\bar{r}^4}\left(\frac{d\bar{r}}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{\bar{r}^2}=\frac{1}{\bar{r}^2}2\bar{\lambda}-\frac{1}{h^2}+k^2\{1+2(\lambda-\bar{\lambda})\}\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h^2}2\bar{\lambda}.$$

Сделав в последнем уравнении подстановку $\rho=\frac{1}{\bar{r}}$ и затем продифференцировав его по φ, получаем эквивалентное дифференциальное уравнение второго порядка, а именно

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}+\rho=\frac{fm}{h_1^2}\left\{1+\left[\frac{3h_1^2}{c^2}+\frac{3e^2b^2}{10}(3-2k^2)\right]\rho^2\right\}+\frac{3fme^2b^2}{2c^2}\rho^4. \qquad (15)$$

Если $e=0$ и $c\to\infty$, то можно получить следующее приближенное решение. Известно, что орбита, дифференциальное уравнение которой имеет вид [4],

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}+\rho=\frac{fm}{h_1^2} \qquad (16)$$

является коническим сечением

$$p\rho=1+\varepsilon\cos\varphi, \quad p=\frac{h_1^2}{fm}.$$

Переходя ко второму приближению, ищем решение уравнения (15) в виде

$$\rho(\varphi)=\rho_0(\varphi)+\rho_1(\varphi).$$

Вставляя $\rho(\varphi)$ в (15) и учитывая, что $\rho_0(\varphi)$ удовлетворяет уравнению (16), получаем

$$\frac{d^2\rho_1}{d\varphi^2}+\rho_1=\alpha(\rho_0+\rho_1)^2+\beta(\rho_0+\rho_1)^4,$$

$$\alpha=\frac{fm}{h_1^2}\left[\frac{3h_1^2}{c^2}+\frac{3e^2b^2}{10}(3-2k^2)\right]; \quad \beta=\frac{3fme^2b^2}{2c^2}.$$

При этом добавку ρ_1 в решении, возникающую за счет малых добавок $\alpha\rho^2$ и $\beta\rho^4$, считаем весьма малой сравнительно с ρ_0. Пренебрегая внутри круглой скобки ρ_1 сравнительно с ρ_0, приближенно ищем ρ_1 из уравнения

$$\frac{d^2\rho_1}{d\varphi^2}+\rho_1=\alpha\rho_0^2+\beta\rho_0^4. \qquad (17)$$

В первой части уравнения (17) оставляются только те члены, которым отвечает непериодическое частное решение, так как учет периодических решений уточненную орбиту планеты оставляет замкнутой (так как предполагается, что $\varepsilon<1$, поэтому орбита, рассматриваемая в первом приближении (16), представляет собой эллипс).

Таким образом рассматривается уравнение

$$\frac{d^2\rho_1}{d\varphi^2}+\rho_1=2\left(\frac{\alpha\varepsilon}{p^2}+\frac{2\beta\varepsilon}{p^4}+\frac{\varepsilon^3\beta}{p^4}\right)\cos\varphi+\frac{2\beta\varepsilon^3}{p^4}\cos\varphi\cos 2\varphi. \qquad (18)$$

Соответствующее частное непериодическое решение уравнения (18) есть

$$\rho_1=\gamma\varphi\sin\varphi.$$

Учитывается только эта добавка к первому приближению $\rho=\rho_0(\varphi)$, так как только она нарушает замкнутый характер орбиты, что выражается, как можно считать, в медленном вращении орбиты в ее плоскости.

Уточнённая орбита согласно сказанному имеет вид

$$\rho=\rho_0(\varphi)+\rho_1(\varphi)=\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{p}\left(\cos\varphi+\gamma\frac{p}{\varepsilon}\varphi\sin\varphi\right)\approx$$

$$\approx\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{p}\cos\left(1-\frac{p}{\varepsilon}\gamma\right)\varphi,$$

отсюда видно, что прежнее значение ρ будет повторяться не при полном обороте полярного радиуса, т. е. не при увеличении φ на 2π, а при повороте на немного больший угол, именно на угол

$$\frac{2\pi}{1-\frac{p}{\varepsilon}\gamma}\approx 2\pi+\frac{2\pi p\gamma}{\varepsilon}.$$

Это можно понимать в том смысле, что за время обхода планетой своей орбиты сама орбита успевает повернуться в том же направлении на угол

$$\Delta=\frac{2\pi p\gamma}{\varepsilon}.$$

Если a — большая полуось эллипса, то $p=a(1-\varepsilon^2)$ [5] и

$$\Delta_{100}=\left(\frac{6\pi m}{a(1-\varepsilon^2)}+\frac{9\pi e^2b^2m\varepsilon^2}{2a^3(1-\varepsilon^2)^3}+\frac{6\pi m e^2b^2}{a^3(1-\varepsilon^2)^3}+\frac{6\pi e^2b^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2\,10}\right]\times$$

$$\times\left(2{,}06265\,\frac{T_3}{T}\,10^7\right)'',$$

где T_3 — период обращения Земли, T — период обращения рассматриваемой планеты, ε — эксцентриситет орбиты, $f=c=1$.

Полученная формула дает возможность вычислить сдвиг перигелия планеты за 100 лет с учетом того, что Солнце является эллипсоидом вращения. Численный расчет для сдвига перигелия Меркурия дает следующую величину: $\Delta_{100}=43{,}2''+2{,}6''$. При этом $43{,}2''$ обусловлены релятивистскими эффектами. Этот вклад предсказывает общая теория относительности. Вклад $2{,}6''$ обусловлен наличием эксцентриситета у Солнца, он является нерелятивистским и обусловлен добавлением к ньютоновскому закону тяготения силы вида $\frac{e^2}{r^3}$. Члены $\sim\frac{e^2}{c^2}$ дают вклад $10^{-6''}$, который является пренебрежительно малым.

Таким образом, на основании проведенных расчетов, можно сделать вывод, что действительно в данном случае существует некоторое несогласие теории относительности Эйнштейна с данными эксперимента, так как эффект сдвига перигелия Меркурия, обусловленный релятивистскими эффектами, из теории 43,2″, а эксперимент дает 40,6″. Расчет, проведенный в рамках релятивистской теории тяготения, подтверждает вывод Дикке и его утверждение о несогласии данных эксперимента с данными теории относительности Эйнштейна.

Но из данного расчета нельзя делать окончательный вывод, так как даже в рамках общей теории относительности учтены не все факторы, влияющие на движение Меркурия.

Авторы выражают благодарность К. П. Станюковичу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dicke R. H., Goldenberg H. M. Phys. Rev. Let., 18, 27, 1967.
2. Синг Дж. Общая теория относительности. М., ИЛ, 1963.
3. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М., Физматгиз, 1969.
4. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Физматгиз, 1967.
5. Мак-Витти Г. Общая теория относительности и космология. М., ИЛ, 1961.

Поступила в редакцию
10.2 1970 г.

Кафедра
квантовой статистики