Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1971

УДК 621.371.25

В. Д. ГУСЕВ, Л. И. ПРИХОДЬКО

О ФЛУКТУАЦИЯХ НАПРАВЛЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАССЕЯННЫХ ВОЛН ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ СЛОЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Рассмотрена задача о нахождении функции распределения и статистических характеристик производной фазы поля при отражении плоских однородных волн от слоя со случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости.

Измерения углов прихода радиоволн дифференциально-фазовыми системами основаны на использовании градиента фазы вдоль направления распространения или, точнее, разности фаз поля в двух (или нескольких) точках пространства. В связи с этим представляет интерес рассмотреть задачу о нахождении функции распределения и статистических характеристик производной фазы поля при отражении от неоднородного плазменного слоя (типа ионосферы).

После отражения от неоднородного ионосферного слоя волна распространяется в свободном полупространстве. Отраженное поле на любом расстоянии от слоя можно представить в виде суммы среднего (регулярного) поля $\overline{E}$ и случайного (рассеянного) поля ξ, причем если на слой падала плоская однородная гармоническая волна $e^{-ik\sin\theta_0 x - ik\cos\theta_0 z}$ (x, z — плоскость падения, нормаль к слою направлена по оси z), скалярное поле E можно записать так:

$$E = \overline{E} + \xi = \overline{R}e^{-ik\sin\theta_0 x + ik\cos\theta_0 z} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varkappa_1 x - i\varkappa_2 y + i\sqrt{k^2-\varkappa_1^2-\varkappa_2^2}\,z} c(\varkappa_1, \varkappa_2)\, d\varkappa_1\, d\varkappa_2, \tag{1}$$

где $\overline{R}$ — комплексный коэффициент отражения среднего поля, $c(\varkappa_1, \varkappa_2)$ — Фурье-компонент рассеянного поля ξ. Представим полное поле E в виде

$$E = E_R + iE_i = Ae^{i\Psi}, \tag{2}$$

где $E_R = ReE$, $E_i = ImE$, A — амплитуда полного поля, Ψ — фаза полного поля, и если положить $\Psi = \varphi_0 - \varphi$, где φ_0 — фаза среднего поля, то

$$E_R = A\cos(\varphi_0 - \varphi) = A\cos\varphi\cos\varphi_0 + A\sin\varphi\sin\varphi_0,$$

$$E_i = A\sin(\varphi_0 - \varphi) = A\cos\varphi\sin\varphi_0 - A\sin\varphi\cos\varphi_0.$$

Обозначая $A\cos\varphi = B$, $A\sin\varphi = C$, получим следующее представление для действительной и мнимой части рассеянного поля:

$$\begin{aligned}\xi_R &= (B-\rho_0)\cos\varphi_0 + C\sin\varphi_0,\\ \xi_i &= (B-\rho_0)\sin\varphi_0 - C\cos\varphi_0,\end{aligned} \tag{3}$$

здесь $\rho_0 = |\overline{R}|$.

Для определения функции распределения производной фазы φ_x (φ_y, φ_z) надо знать совместное четырехмерное распределение амплитуды и фазы поля и их производных по x (y, z). Исходным для решения этой задачи является совместное распределение $B_1 = B - \rho_0$, C и их производных по x (y, z) B_{1x}, C_x [1]. Для этого надо знать совместное распределение действительной и мнимой части рассеянного поля ξ_R, ξ_i и их производных по x (y, z) ξ_{Rx}, ξ_{ix}. В общем случае на любом расстоянии от слоя решение этой задачи затруднительно, поэтому найдем функцию распределения φ_x в зоне дифракции Фраунгофера, считая на основании работ [2, 3, 4], что рассеянное поле в зоне Фраунгофера имеет нормальный закон распределения. Тогда B_1, C, B_{1x}, C_x также распределены по нормальному закону, причем из (3) следует

$$\begin{aligned}B_1 &= \xi_R\cos\varphi_0 + \xi_i\sin\varphi_0, \quad C = \xi_R\sin\varphi_0 - \xi_i\cos\varphi_0;\\ B_{1x} &= (\xi_{Rx} - k\sin\theta_0\xi_i)\cos\varphi_0 + (\xi_{ix} + k\sin\theta_0\xi_R)\sin\varphi_0,\\ C_x &= (\xi_{Rx} - k\sin\theta_0\xi_i)\sin\varphi_0 - (\xi_{ix} + k\sin\theta_0\xi_R)\cos\varphi_0.\end{aligned} \tag{4}$$

Учитывая, что в зоне диффракции Фраунгофера внутренняя корреляция поля отсутствует, т. е.

$$\overline{\xi_R\xi_i} = \overline{\xi_{Rx}\xi_{ix}} = \overline{\xi_R\xi_{Rx}} = \overline{\xi_i\xi_{ix}} = 0,$$

найдем совместное четырехмерное нормальное распределение $W(B_1, C, B_{1x}, C_x)$. Для этого рассмотрим четыре величины, определенные следующим образом [5]:

$$x_1 = B_1;\ x_2 = C;\quad x_3 = B_{1x} + \frac{\sigma_{B1x}}{\sigma_1}\widetilde{R}_{14}C;\quad x_4 = C_x - \frac{\sigma_{B1x}}{\sigma_1}\widetilde{R}_{14}B_1, \tag{5}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}\overline{x_1^2} = \overline{x_2^2} = \overline{\xi_R^2} = \overline{\xi_i^2} = \sigma_1^2;\quad \overline{x_3^2} = \overline{x_4^2} = \sigma_{B1x}^2(1 - \widetilde{R}_{14}^2);\\ \sigma_{B1x}^2 = \overline{\xi_{Rx}^2} = \overline{\xi_{ix}^2} = \sigma_1^2P_*^2;\quad \widetilde{R}_{14} = \frac{P^*}{P_*};\end{aligned} \tag{6}$$

$$P^* = \frac{\iint\limits_{-\infty}^{\infty}(\varkappa_1 - k\sin\theta_0)F(\varkappa_1, \varkappa_2)\,d\varkappa_1\,d\varkappa_2}{\iint\limits_{-\infty}^{\infty}F(\varkappa_1, \varkappa_2)\,d\varkappa_1\,d\varkappa_2};\quad P_*^2 = \frac{\iint\limits_{-\infty}^{\infty}(\varkappa_1 - k\sin\theta_0)^2F(\varkappa_1, \varkappa_2)\,d\varkappa_1\,d\varkappa_2}{\iint\limits_{-\infty}^{\infty}F(\varkappa_1, \varkappa_2)\,d\varkappa_1\,d\varkappa_2},$$

здесь $F(\varkappa_1, \varkappa_2)$ — средний угловой энергетический спектр рассеянного поля ξ, а P_* и P^* характеризуют соответственно среднеквадратичную ширину полосы энергетического спектра и асимметрию спектра в плоскости падения x, z. Можно показать, что средние значения произведений

$$\overline{x_1x_2} = \overline{x_1x_3} = \overline{x_1x_4} = \overline{x_2x_3} = \overline{x_2x_4} = \overline{x_3x_4} = 0,$$

поэтому совместная плотность вероятности

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4) = W(x_1) W(x_2) W(x_3) W(x_4),$$

где $W(x_1)$, ..., $W(x_4)$ — соответственно плотности вероятности для величин x_1, ..., x_4. И поскольку функциональный определитель преобразования (5) равен единице, то для искомой функции распределения имеем

$$W(B_1, C, B_{1x}, C_x) = \frac{1}{(2\pi)^2 \sigma_1^2 \sigma_{B1x}^2 (1-\widetilde{R}_{14}^2)} \exp\left\{\frac{B_1^2 + C^2}{2\sigma_1^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\sigma_{B1x}^2 (1-\widetilde{R}_{14}^2)} \left[\left(B_{1x} + \frac{\sigma_{B1x}}{\sigma_1} \widetilde{R}_{14} C\right)^2 + \left(C_x - \frac{\sigma_{B1x}}{\sigma_1} \widetilde{R}_{14} B_1\right)^2\right]\right\}. \quad (7)$$

Производя в (7) замену переменных

$$\begin{gathered} B_1 = B - \rho_0 = A\cos\varphi, \quad C = A\sin\varphi, \\ B_{1x} = A_x \cos\varphi - A\varphi_x \sin\varphi, \quad C_x = A_x \sin\varphi + A\varphi_x \cos\varphi, \end{gathered} \quad (8)$$

получим исходное четырехмерное распределение $W(A, \varphi, A_x, \varphi_x)$. Так как якобиан преобразования (8) равен A^2, то

$$W(A, \varphi, A_x, \varphi_x) = \frac{A^2}{(2\pi)^2 \sigma_1^2 \sigma_{B1x}^2 (1-\widetilde{R}_{14}^2)} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{1-\widetilde{R}_{14}^2}\left[\frac{1}{2\sigma_1^2}(A^2 - 2A\rho_0\cos\varphi + \rho_0^2) + \frac{1}{2\sigma_{B1x}^2}(A_x^2 + A^2\varphi_x^2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\widetilde{R}_{14}}{\sigma_1 \sigma_{B1x}} (-A^2\varphi_x + A_x\rho_0 \sin\varphi + A\rho_0\varphi_x\cos\varphi)\right]\right\}. \quad (9)$$

Для получения функции распределения производной фазы φ_x необходимо (9) проинтегрировать по A_x, A, φ. Опуская довольно громоздкие выкладки, связанные с этой процедурой, напишем окончательный результат — выражение для функции распределения производной по x от фазы поля в зоне дифракции Фраунгофера

$$W(\varphi_x) = \frac{1}{(2)^{3/2}\sigma_1^3 P_* (1-\widetilde{R}_{14}^2)^{1/2}} \frac{e^{\frac{q^2}{4m}}}{4m^{3/2}} e^{-\frac{\beta^2}{1-\widetilde{R}_{14}^2}} \left[{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\ 1;\ -\chi\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{q^2}{4m} {}_1F_1\left(\frac{1}{2},\ 2;\ -\chi\right)\right], \quad (10)$$

здесь

$$\beta^2 = \frac{\rho_0^2}{2\sigma_1^2}, \quad q^2 = \frac{2\beta^2}{1-\widetilde{R}_{14}^2}\left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{\widetilde{R}_{14}}{\sigma_{B1x}}\varphi_x\right)^2,$$

$$m = \frac{1}{2(1-\widetilde{R}_{14}^2)}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{2\widetilde{R}_{14}\varphi_x}{\sigma_1\sigma_{B1x}} + \frac{\varphi_x^2}{\sigma_{B1x}^2}\right), \quad \chi = \frac{q^2}{4m} - \beta^2 \frac{\widetilde{R}_{14}^2}{1-\widetilde{R}_{14}^2},$$

${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Из (10) видно, что при $P^*=0$, т. е. если средний угловой энергетический спектр симметричен относительно $k\sin\theta_0$, распределение $W(\varphi_x)$ — функция четная и кривая, ей соответствующая, симметрична относительно $k\sin\theta_0$. Если P^* отлична от нуля, распределение $W(\varphi_x)$ асимметрично. Вычислим для этого случая среднее значение производной фазы $\overline{\varphi}_x$, т. е. интеграл

$$\overline{\varphi}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x W(\varphi_x)\, d\varphi_x. \tag{11}$$

Подставляя в (11) выражение для $W(\varphi_x)$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$\overline{\varphi}_x = P^* e^{-\beta^2}. \tag{12}$$

Аналогичные выражения можно получить для функций распределения производных по y, z от фазы поля, а также их средние значения $\overline{\varphi}_y$, $\overline{\varphi}_z$ (в данном случае $\overline{\varphi}_y=0$).

Из (12) видно, что при $\beta^2=0$, $\overline{\varphi}_x=P^*$ и распределение $W(\varphi_x)$ — центральное. В этом случае среднее значение производной фазы по x совпадает со средним смещением углового энергетического спектра рассеянного поля $F(\varkappa_1, \varkappa_2)$ относительно $k \sin\theta_0$. При $\beta^2 \to \infty$ $\overline{\varphi}_x \to 0$ и среднее направление поля совпадает с направлением невозмущенного поля. Однако в реальных условиях даже в случае больших β^2 $\overline{\varphi}_x$ может заметно отличаться от нуля, поскольку при практических измерениях приходится иметь дело с ограниченным объемом выборки случайной величины. Влияние последнего обстоятельства определяется асимптотическим поведением $W(\varphi_x)$. В соответствии с (10) при $|\varphi_x| \to \infty$ $W(\varphi_x) \sim \frac{1}{|\varphi_x|^3}$. Но тогда переход от бесконечного интервала усреднения (от генеральной совокупности) к конечному интервалу (к конечной выборке) при наличии асимметрии распределения может существенно изменить $\tilde{\varphi}_x$:

$$\tilde{\varphi}_x = \int_{-\Delta}^{\Delta} \varphi_x W(\varphi_x)\, d\varphi_x, \tag{13}$$

где Δ—интервал усреднения. Используя (10) и (13), для частного случая $\beta^2 \gg 1$ можно получить

$$\tilde{\varphi}_x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} P^* \frac{\Delta^3}{P_*^3} \beta \exp\left[-\frac{\beta^2 \frac{\Delta^2}{P_*^2}}{1+\frac{\Delta^2}{P_*^2}} \right]$$

при условии $\Delta \ll \frac{P_*^2}{2P^*}$. Далее, воспользовавшись (10), можно показать, что с вероятностью 0,95 для больших β $\Delta \approx 2\frac{P_*}{\beta}$ и тогда

$$\tilde{\varphi}_x \approx \frac{0{,}32}{\sqrt{\pi}} \frac{P^*}{\beta^2}. \tag{14}$$

В этом случае среднее значение производной фазы совпадает по порядку величины β со средним смещением углового энергетического спектра полного поля [6] относительно $k \sin \theta_0$, а именно с величиной

$$P_E^* = \frac{\iint\limits_{-\infty}^{\infty} (\varkappa_1 - k \sin \theta_0) F_E(\varkappa_1, \varkappa_2)\, d\varkappa_1\, d\varkappa_2}{\iint\limits_{-\infty}^{\infty} F_E(\varkappa_1, \varkappa_2)\, d\varkappa_1\, d\varkappa_2}, \tag{15}$$

где F_E — средний угловой энергетический спектр полного поля E. Поскольку $F_E(\varkappa_1, \varkappa_2) = \rho_0^2 \delta(\varkappa_1 - k \sin \theta_0)\, \delta(\varkappa_2) + F$, то

$$P_E^* = \frac{P^*}{1+\beta^2} \tag{16}$$

и при $\beta = 0$ $P_E^* = P^*$, при $\beta^2 \gg 1$ $P_E^* \sim \frac{P^*}{\beta^2}$.

В качестве примера приведем выражение для $\widetilde{\varphi}_x$, воспользовавшись результатами работы [8], в которой было вычислено P^* для случая, когда на неоднородный слой ионосферы, диэлектрическая проницаемость которого имеет вид

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}(z) + \mu(x, y, z),$$

где $\bar{\varepsilon}(z) = 1 - \frac{z}{z_1}$, а $\mu(x, y, z)$ — однородное случайное гауссово поле, под углом θ_0 падает плоская однородная гармоническая волна вида $e^{-ik\sin\theta_0 x - ik\cos\theta_0 z}$. Задача решалась методом малых возмущений, т. е. полученное решение справедливо, когда $\beta^2 \gg 1$. В этом случае для крупномасштабных неоднородностей ($kl \gg 1$, l — радиус корреляции случайных неоднородностей) и для достаточно больших углов падения

$$P^* \approx -\frac{1}{kl^2 \sin \theta_0}$$

и согласно (14)

$$\widetilde{\varphi}_x \approx -\frac{0{,}32}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{kl^2 \sin \theta_0 \beta^2}. \tag{17}$$

Как указывалось, практические измерения углов прихода дифференциально-фазовыми системами основаны на использовании разности фаз поля в двух (или нескольких) точках пространства. При этом обычно считают, что разность фаз поля в двух точках пространства связана с углом прихода радиоволны следующим образом [7]:

$$\Delta\Psi = kd \sin \theta_0,$$

где d — расстояние между антеннами, θ_0 — угол прихода радиоволны. Поэтому вычисленная выше $\overline{\varphi}_x$ будет играть роль систематической ошибки, обусловленной распространением волн в случайно-неоднородной ионосфере. Вычислим величину этой ошибки в углах, иными словами, вычислим угол между направлением прихода волны (невозмущенной) и направлением прихода, соответствующим среднему градиенту фазы полного поля. Для этого представим среднее значение производной фазы поля по x в виде

$$\overline{\Psi}_x = -k \sin \theta_0 - \overline{\varphi}_x = -k \sin(\theta_0 + \gamma), \tag{18}$$

где γ — искомый угол. Если $\gamma \ll 1$, то из (18) можно получить

$$\gamma \approx \frac{\bar{\varphi}_x}{k \cos \theta_0}.$$

Таким образом, при наклонном зондировании ионосферы может иметь место систематическая ошибка в определении углов прихода радиоволн, обусловленная несимметрией спектра отраженных рассеянных волн в плоскости падения. При нормальном падении волны на слой спектр $F(\varkappa_1, \varkappa_2)$ симметричен относительно $\varkappa_1=0$, $\varkappa_2=0$ и $\overline{\varphi_x}=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Советское радио», 1966.
2. Mercier R. P. Phil. Mag., 4, 763, 1959.
3. Денисов Н. Г. «Изв. вузов», радиофизика, 4, № 4, 630, 1961.
4. Тамоикин В. В., Фрайман А. А. «Изв. вузов», радиофизика, 11, № 1, 56, 1968.
5. Бунимович В. И. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах. М., «Советское радио», 1951.
6. Ратклифф Дж. «Проблемы современной физики», № 10, 1957.
7. Пестряков В. Б. Фазовые радиотехнические системы. М., «Советское радио», 1968.
8. Гусев В. Д., Приходько Л. И. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 2, 1970.

Поступила в редакцию
20.2 1970 г.

Кафедра
волновых процессов