

О. Д. АХМАТОВА, Г. А. БЕНДРИКОВ

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Получены уравнения траекторий корней и формулы параметра для систем с распределенным запаздыванием, характеристическое уравнение которых имеет вид $\Phi_n(p) + k\Psi_m(p)e^{-\sqrt{p}\tau} = 0$ (k — свободный параметр). Рассмотрены общие свойства траекторий корней и приведен пример.

Рассмотрим замкнутую систему с сосредоточенными и распределенными параметрами. Структурную схему такой системы представим как два блока (рис. 1): блок $G(p)$ с распределенными параметрами и блок $W(p)$, состоящий из произвольной комбинации элементов с сосредоточенными параметрами. Передаточную функцию части системы, состоящей из элементов с сосредоточенными параметрами, можно представить дробно-рациональной функцией вида

$$W(p) = \frac{k\Psi_m(p)}{\Phi_n(p)}, \quad (1)$$

где $\Psi_m(p)$, $\Phi_n(p)$ — целые полиномы p степени m и n соответственно, k — действительный параметр.

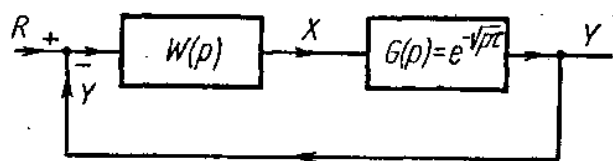


Рис. 1

При описании элементов с распределенными параметрами используются дифференциальные уравнения в частных производных. Рассмотрим класс систем с распределенными параметрами, описываемых одномерным уравнением теплопроводности. Таки-

ми элементами являются тепловые объекты [1, 2], телеграфный кабель [3], распределенные RC-линии [4, 5] и т. п. Передаточная функция такого элемента при условии отсутствия отражений имеет вид

$$G(p) = e^{-\sqrt{p}\tau}, \quad (2)$$

где τ — время распределенного запаздывания. Этот элемент обычно называют элементом с распределенным запаздыванием [6, 7, 8]. Особенностью передаточной функции (2) является ее неоднозначность. Однако, как показано в работах [9, 10], при исследовании динамики таких систем

необходимо выделить однозначную ветвь функций (2), значение которой при $|p| \rightarrow \infty$ и $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg p < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$) стремится к нулю.

Устойчивость системы полностью определяется корнями характеристического уравнения (полюсами передаточной функции замкнутой системы). Переходный процесс определяется вычетами в полюсах передаточной функции и некоторым убывающим со временем членом, оценку которого необходимо производить в каждом конкретном случае [10].

Характеристическое уравнение замкнутой системы, независимо от того, находится элемент с распределенным запаздыванием в главной цепи или в цепи обратной связи, учитывая (1) и (2), можно записать в виде

$$F(p) = \Phi_n(p) + k\Psi_m(p)e^{-V\sqrt{p}\tau} = 0. \quad (3)$$

Для исследования корней характеристического уравнения (3) в зависимости от параметра k применим метод траекторий корней [11].

Уравнение (3) имеет бесконечное число корней, расположенных, вообще говоря, на двулистной поверхности Римана. Чтобы сделать функцию $F(p)$ однозначной, исключим точки разветвления $p=0$ и $|p|=\infty$ и будем рассматривать плоскость p с вырезанной отрицательной действительной полуосью от $p=0$ до $p=-\infty$. Поэтому рассматриваемая плоскость комплексных частот p имеет два берега разреза вдоль отрицательной действительной оси: на верхнем берегу $p=|p|e^{j\pi}$, на нижнем — $p=|p|e^{-j\pi}$. Следовательно, необходимо исследовать только те корни уравнения (3) (нули функции $F(p)$), аргумент которых заключен между $-\pi$ и $+\pi$.

Уравнения траекторий корней и формулы параметра

Для получения уравнения траекторий корней, связывающего координаты δ и ω точек комплексной плоскости p , принадлежащих траекториям, воспользуемся тождествами [11]:

$$\begin{aligned} \Phi_n(\delta + j\omega) &= \Phi_r(\delta, \omega^2) + j\omega\Phi_j(\delta, \omega^2), \\ \Psi_m(\delta + i\omega) &= \Psi_r(\delta, \omega^2) + j\omega\Psi_j(\delta, \omega^2), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \Phi_n(\delta_1) - \frac{\omega^2}{2!} \Phi_n^{\text{II}}(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Phi_n^{\text{IV}}(\delta) - \dots \\ \Phi_j &= \Phi_n^{\text{I}}(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Phi_n^{\text{III}}(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Phi_n^{\text{V}}(\delta) - \dots \end{aligned}$$

Аналогичный вид имеют выражения для Ψ_r и Ψ_j . Учтем, что

$$e^{-V\sqrt{p}\tau} = e^{-(\alpha + j\theta)}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{Re } V\sqrt{p}\tau = V \sqrt{0,5\tau(V\delta^2 + \omega^2 + \delta)}, \\ \theta &= \text{Im } V\sqrt{p}\tau = V \sqrt{0,5\tau(V\delta^2 + \omega^2 - \delta)}, \end{aligned} \quad (6)$$

или, если воспользоваться представлением комплексного числа в полярной системе координат $p = \rho e^{i\varphi}$,

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{Re} \sqrt{\rho\tau} = \sqrt{\rho\tau} \cos \frac{\varphi}{2}, \\ \theta &= \operatorname{Im} \sqrt{\rho\tau} = \sqrt{\rho\tau} \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя выражения (4) и (5) в характеристическое уравнение (3) и приравнявая нулю действительные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned} \Phi_r + ke^{-\alpha}\Psi_r \cos \theta + ke^{-\alpha}\omega\Psi_j \sin \theta &= 0, \\ \omega\Phi_j - ke^{-\alpha}\Psi_r \sin \theta + ke^{-\alpha}\omega\Psi_j \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда найдем уравнение траекторий

$$\operatorname{tg} \theta = \omega \frac{\Phi_r \Psi_j - \Phi_j \Psi_r}{\Phi_r \Psi_r + \omega^2 \Phi_j \Psi_j} \quad (9)$$

и формулу параметра k , соответствующего каждой точке траекторий

$$k^2 = e^{2\alpha} \frac{\Phi_r^2 + \omega^2 \Phi_j^2}{\Psi_r^2 + \omega^2 \Psi_j^2} = e^{2\alpha} \frac{|\Phi_n|^2}{|\Psi_m|^2}. \quad (10)$$

Значения параметра k можно определить также из уравнений (8), подставляя в них δ и ω , принадлежащие траекториям (9). Следует отметить, что кривые, построенные по уравнению (10), для фиксированных значений k (линии равного значения параметра) всегда ортогональны траекториям корней (9).

Наряду с аналитическим построением траекторий корней по формуле (9) для построения траекторий можно воспользоваться некоторыми геометрическими представлениями на плоскости p .

Пусть p_v ($v=1, 2, \dots, n$) и z_μ ($\mu=1, 2, \dots, m$) — нули полиномов $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ соответственно и коэффициенты при старших степенях p в этих полиномах равны единице.

Подставив в уравнение (3) координаты любой точки $\tilde{p} = \tilde{\delta} + j\tilde{\omega}$, принадлежащей траекториям корней, получим тождественное равенство

$$\prod_{v=1}^n (\tilde{p} - p_v) + ke^{-V\tilde{\rho}\tau} \prod_{\mu=1}^m (\tilde{p} - z_\mu) \equiv 0. \quad (11)$$

Представив векторы $(\tilde{p} - p_v)$, $(\tilde{p} - z_\mu)$ через их модули и фазы и подставив их в (11), получим

$$k = - \frac{e^{\alpha} \prod_{v=1}^n |p - p_v|}{\prod_{\mu=1}^m |p - z_\mu|} e^{j\left(\theta + \sum_{v=1}^n \xi_v - \sum_{\mu=1}^m \psi_\mu\right)}.$$

Учитывая, что k принимает только действительные значения, имеем основное фазовое уравнение траекторий

$$\theta + \sum_{v=1}^n \xi_v - \sum_{\mu=1}^m \psi_\mu = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \dots \quad (12)$$

Причем четным значениям N соответствуют отрицательные значения параметра k , нечетным N — положительные k . Соответствующие траектории называются четными (нечетными).

Значение параметра k , соответствующее корню $\tilde{p}$, определяется по формуле

$$k = (-1)^{N+1} \frac{e^{\alpha} \prod_{v=1}^n |\tilde{p} - p_v|}{\prod_{\mu=1}^m |\tilde{p} - z_{\mu}|}. \quad (13)$$

Формула (12) дает возможность геометрического построения траекторий корней [11]. Если известны основные начальные и предельные точки, то нахождение углов ζ_v и ψ_{μ} не представляет труда. Значение θ согласно (6) и (7) определяется только временем распределенного запаздывания τ и координатами исследуемой точки $p(\delta, \omega)$. Следовательно, составив таблицу $\theta(\delta\tau, \omega\tau)$ или $\theta(p\tau, \varphi)$, можно значительно упростить построение траекторий корней по формуле (12).

Общие свойства траекторий корней уравнения (3)

По уравнениям (9) или (12) траектории корней могут быть построены точно. Однако знание общих свойств траекторий корней уравнения вида (3) дает возможность представить качественную картину траекторий и полезно при построении и использовании траекторий.

1. Основные начальные ($k=0$) и предельные ($k=\pm\infty$) точки траекторий определяются соответственно из уравнений

$$\Phi_n(p) = 0, \quad \Psi_m(p) = 0. \quad (14)$$

2. Траектории корней симметричны относительно действительной оси. Действительно, используя (7) и (9), получим уравнения траекторий

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{p\tau} \sin \frac{\varphi}{2}\right) = \omega f(\delta, \omega^2) \quad \text{для } \varphi > 0, \omega > 0,$$

и

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{p\tau} \sin -\frac{|\varphi|}{2}\right) = -|\omega| f(\delta, \omega^2) \quad \text{для } \varphi < 0, \omega < 0.$$

3. Поведение траекторий корней на действительной оси. На действительной оси $\omega=0$ и уравнение траекторий (9) принимает вид $\operatorname{tg} \theta = 0$, т. е.

$$\theta = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15)$$

Откуда следует.

а. Положительная действительная полуось ($\delta > 0$) целиком принадлежит траекториям, так как на ней $\varphi=0$ и согласно (7) $\theta=0$ для всех значений p . На действительной положительной полуоси уравнение траекторий (12) имеет вид

$$\sum_{v=1}^n \zeta_v - \sum_{\mu=1}^m \psi_{\mu} = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \dots \quad (16)$$

б. На рассматриваемой плоскости p отрицательная полуось имеет два берега разреза ($\varphi=\pm\pi$). Из (15) и (7) получим, что траекториям

корней принадлежат только отдельные дискретные точки отрицательной действительной полуоси

$$\delta_N = -\frac{(N\pi)^2}{\tau}. \quad (17)$$

Значение параметра в этих точках равно

$$|k| = \frac{|\Phi_r(\delta_N)|}{|\Psi_r(\delta_N)|}. \quad (18)$$

Таким образом, на отрицательной действительной полуоси могут находиться только либо основные точки, определяемые уравнениями (14), либо дискретные точки — (17).

4. Углы входа и выхода траекторий. Фазовое уравнение (12) дает возможность определить углы, которые образуют с положительным направлением действительной оси ветви траекторий корней при прохождении через любую точку p -плоскости, принадлежащую этим траекториям. Особый интерес для рассматриваемых уравнений представляет поведение траекторий вблизи основных точек, лежащих на отрицательной действительной полуоси. Поскольку рассматривается плоскость p с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси, то действительные начальные точки, являющиеся корнями исходного уравнения при $k=0$, можно рассматривать как находящиеся на двух берегах разреза: $p_1 = |p_1|e^{j\pi}$ и $\bar{p}_1 = |p_1|e^{-j\pi}$. При непрерывном увеличении k эти корни выходят на комплексную плоскость, не пересекая разреза, т. е. корень, находящийся на верхнем берегу, может смещаться только в верхнюю полуплоскость рассматриваемой p -плоскости (отрицательный угол выхода для корня, находящегося на верхнем берегу, означает переход его на второй лист поверхности Римана).

Запишем основное фазовое уравнение (12) для точки $\tilde{p} = p(\tilde{\rho}, \tilde{\varphi})$, расположенной вблизи простой действительной начальной точки p_1 :

$$\sqrt{\tau\tilde{\rho}} \sin \frac{\tilde{\varphi}}{2} + \zeta_1 + \sum_{v=2}^n \zeta_v - \sum_{\mu=1}^m \psi_\mu = N\pi. \quad (19)$$

Угол выхода ζ_1 из точки p_1 , находящейся на верхнем берегу разреза, определим из уравнения (19) при $\tilde{\varphi} \rightarrow +\pi$, $\tilde{\rho} \rightarrow |\delta_1|$

$$\zeta_1 = \pi N - \left[\sqrt{\tau|\delta_1|} + \sum_{v=2}^n \zeta_v - \sum_{\mu=1}^m \psi_\mu \right], \quad (20)$$

$\zeta_v(\psi_\mu)$ — углы, образованные векторами, проведенными из начальных (предельных) точек в исследуемую точку $p = -\delta_1$.

В качестве примера приведем расчет углов выхода для основных точек разной частотности. Для системы класса $[1, 0]$ характеристическое уравнение имеет вид

$$(p + \delta_0) + ke^{-\sqrt{p\tau}} = 0.$$

Угол выхода из начальной точки $p = -\delta_0 < 0$ согласно (20) равен $\zeta_1 = N\pi - \sqrt{\delta_0\tau}$.

Если $\delta_0\tau < \pi^2$, то из точки $p = -\delta_0$ выходит нечетная траектория под углом $\xi_1 = (\pi - \sqrt{\delta_0\tau})$ (рис. 2, а), если $4\pi^2 < \delta_0\tau < \pi^2$, то из точки $p = -\delta_0$ выходит четная траектория под углом $\xi_1 = 2\pi - \sqrt{\delta_0\tau}$ (рис. 2, б). Таким образом, угол выхода траекторий из начальной точки зависит как от времени распределенного запаздывания, так и от координаты этой точки на действительной оси.

В случае, когда имеется двукратная начальная действительная точка, характеристическое уравнение можно записать в виде (система [2,0]) $(p + \delta_0)^2 + ke^{-\sqrt{p}\tau} = 0$. Угол выхода определяется из (20) $2\xi_1 = N\pi - \sqrt{\delta_0\tau}$.

Если $\delta_0\tau < \pi^2$, то $\xi_1^{(1)} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{\delta_0\tau}}{2}\right)$ для нечетной траектории и $\xi_1^{(2)} = \left(\pi - \frac{\sqrt{\delta_0\tau}}{2}\right)$ для четной траектории (рис. 2, в).

Напомним, что траектории кор... и... е... р... н... о... н... с... е... но действительной оси. Аналогично получаются выражения для угла входа в основные предельные точки, находящиеся на отрицательно... де... с... в... е... льно... полуоси.

5. Критические значения частоты и параметра. Подставляя в уравнение траекторий (9) $\delta = 0$, находим критические значения частоты ω_k или, иначе говоря, координаты точек пересечения ветвями траекторий мнимой оси. Уравнение критических частот трансцендентно и имеет бесчисленное множество корней. Выход хотя бы одного корня с изменением параметра на мнимую ось соответствует границе устойчивости системы. Критические значения параметров, т. е. значения параметров, при которых ветви траекторий пересекают мнимую ось, вычисляются по формуле (10) при подстановке $\delta = 0$ и $\omega = \omega_k$:

$$k_k^2 = e^{-2\sqrt{0,5\omega_k\tau}} \frac{|\Phi_n(0, \omega_k)|^2}{|\Psi_m(0, \omega_k)|^2}. \quad (21)$$

Из формулы (21) следует, что для систем без предельных точек $\Psi_m \equiv 1$ при непрерывном увеличении значения параметра k возбуждение возможно лишь на низшей частоте (корень, ближайший к началу координат).

Исследуем возможность аperiodического возбуждения в исследуемой системе. Решение $\omega = 0$ удовлетворяет уравнению критических частот, при этом критическое значение параметра равно

$$k_k = -a_n/b_n,$$

если полиномы $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_n(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \\ \Psi_m(p) &= p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m. \end{aligned} \quad (22)$$

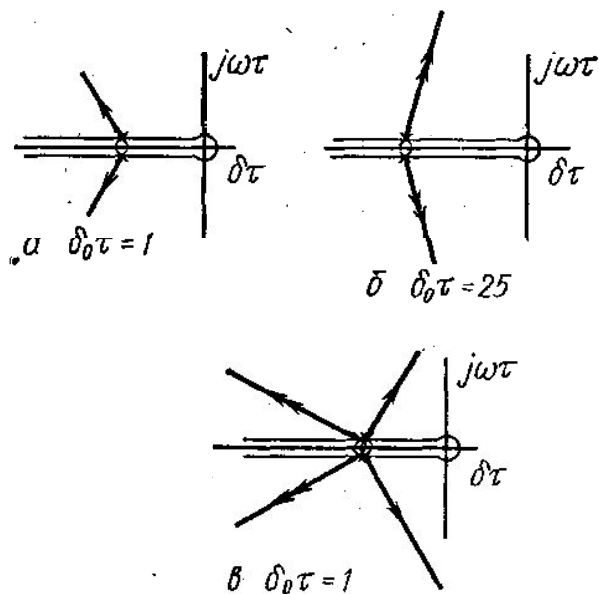


Рис. 2

В этом случае критическое значение k определяется характеристиками входящих в систему элементов с сосредоточенными параметрами.

6. Асимптотические свойства траекторий корней. Из формулы (4) видно, что наивысшая степень δ в числителе правой части уравнения траекторий (9) всегда равна $(n+m-1)$, а в знаменателе $(n+m)$. Поэтому при $\delta \rightarrow +\infty$ правая часть уравнения (9) всегда стремится к нулю и в пределе имеем $\operatorname{tg} \theta = 0$ или, согласно [6],

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2 N^2}{\tau} \left(\delta + \frac{\pi^2 N^2}{\tau} \right), \quad N = 0, \pm 1, \dots \quad (23)$$

Уравнение (23) — это уравнение парабол с вершинами на действительной оси в точках $\delta_N = -\frac{\pi^2 N^2}{\tau}$ (рис. 3). Таким образом, траектории корней систем с распределенным запаздыванием при $\delta \rightarrow +\infty$ стремятся к параболам (23).

Наклонных асимптот (как в случае систем с сосредоточенными параметрами [11]), или горизонтальных асимптот (как для систем с чис-

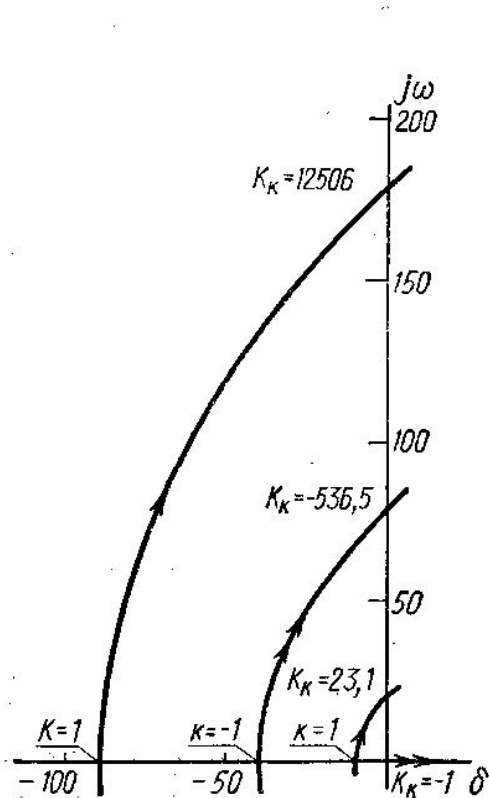


Рис. 3

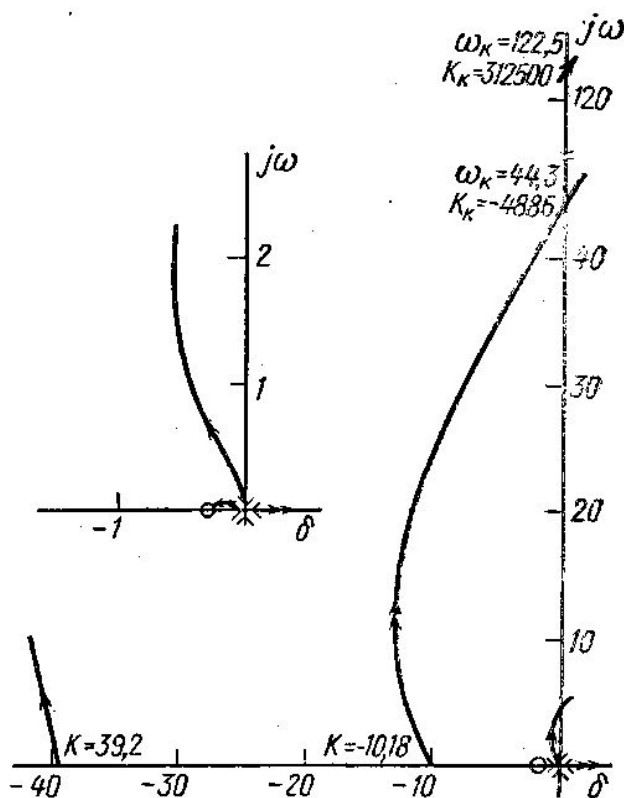


Рис. 4

тым запаздыванием [12]) траектории корней систем с распределенным запаздыванием не имеют.

Отметим, что уравнение (23) совпадает с уравнением траекторий корней системы класса $[0, 0]$ ($\Phi_r = \Psi_r \equiv 1$, $\Phi_j = \Psi_j \equiv 0$) [7]. При $|k|=1$ все ветви траекторий такой системы начинаются на действительной оси и с увеличением $|k| > 1$ корни движутся вправо по параболам (рис. 3). При $|k| < 1$ уравнение $ke^{-\sqrt{p\tau}} + 1 = 0$ не имеет корней на рассматриваемой p -плоскости.

Пересечение мнимой оси траекториями корней имеет место в точках

$$\omega_k = 2 \sqrt{\frac{\pi^2 N^2}{\tau}}$$

при значениях параметра $|k_k| = e^{\pi N}$.

Пример. Рассмотрим систему, характеристическое уравнение которой имеет вид [6]

$$F(p) = p^2 + k(p + 0,3)e^{-\sqrt{p}} = 0. \quad (24)$$

На рис. 4 приведены траектории корней этого уравнения. Одной стрелкой показаны нечетные траектории ($k > 0$), двумя — четные. Очевидно, система неустойчива при любом $k < 0$. Из начала координат, являющегося двойной начальной точкой, при $k > 0$ выходят на комплексную плоскость две ветви траекторий.

Траектории корней вблизи начала координат приведены на рис. 4, а в более крупном масштабе. Точка $p = -0,3$ является предельной точкой на данном листе для четных траекторий. Максимальная степень устойчивости $|\delta| = 0,58$ достигается при $k = 6,8$. При $k_k = 20,4$ корни выходят на мнимую ось в точках $\pm j\omega_k = \pm j4,5$. Следующая пара корней уравнения (24) выходит на рассматриваемую комплексную плоскость (на берега разреза) в точках $p = 39,48 e^{j\pi}$ и $p = 39,48 e^{-j\pi}$ при $k = 39,2$. Следовательно, в области устойчивости ($k < 20,4$) исследуемая однозначная ветвь трансцендентной функции $F(p)$ имеет только одну пару комплексно-сопряженных нулей.

В работе [6] при исследовании траекторий корней уравнения (24) не учтены особенности, связанные с двужначностью функции, и приведенные действительные значения корней не удовлетворяют исходному уравнению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ольденбург Р., Сартorius Г. Динамика автоматического регулирования. М., Госэнергоиздат, 1949.
2. Нетушил А. В. «Изв. АН СССР», энергетика и автоматика, 2, 1962.
3. Круг К. А. Переходные процессы в линейных электрических цепях. М., Госэнергоиздат, 1948.
4. Dutta Ray. Proc. IEEE, 53, No. 1, 1965.
5. H arr W., Costro P. Proc., NEC, 16, 1960.
6. Chu Y. Trans. AIEE, 71, 11, 1952.
7. Смит О. Дж. Автоматическое регулирование. М., Физматгиз, 1962.
8. Под ред. Солодовникова В. В. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования, кн. 2. М., «Машиностроение», 1967.
9. Неймарк Ю. И., Городецкий Ю. И., Леонов Н. Н. «Изв. вузов», радиофизика, 2, № 6, 1959.
10. Конев Ф. Б., Конев Ю. Б. «Изв. вузов», радиофизика, 11, № 3, 1968.
11. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
12. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., № 4, 1967.

Поступила в редакцию
6. 4 1970 г.

Кафедра
физики колебаний