Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1971

УДК — 62—50

В. В. ЛЯЛИН, Н. А. СУХАЧЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕИДЕНТИЧНЫХ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СВЯЗЯМИ МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

В работе исследованы линейные двумерные системы с неидентичными каналами и перекрестными связями методом траекторий корней.

Рассмотрены примеры неидентичности.

Двумерные системы с перекрестными связями находят широкое применение в различных областях техники. Примерами таких систем являются системы управления летательными аппаратами, следящие системы углового сопровождения, системы параллельного включения электродвигателей и т. д.

В работах [1, 2] исследовались линейные двумерные системы с идентичными каналами и симметричными или антисимметричными пекрестными связями методом траекторий корней.

Для практических задач часто важно оценить влияние отклонения параметров линейной двумерной системы от параметров идентичной системы на ее динамические свойства. Аналогично могут быть исследованы неидентичные двумерные системы с перекрестными связями, когда передаточные функции основных и перекрестных каналов (рис. 1) заданы в виде отношения полиномов разных порядков.

Характеристическое уравнение неидентичных систем во многих случаях может быть приведено к виду

$$\Phi_n(p) + \rho\Psi_m(p) = 0, \tag{1}$$

где ρ — любой линейно входящий в коэффициенты характеристического уравнения параметр системы, $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ — полиномы от p степеней n и m соответственно.

Поведение корней характеристического уравнения такого вида изучено в работе [3]. В ней даны уравнения траекторий корней и формулы параметра для систем, описываемых дифференциальными уравнениями n-го порядка.

В данной работе исследование влияния неидентичности по тому или иному параметру на степень устойчивости линейной двумерной системы с перекрестными связями проводится в следующей последовательности.

1. По структурной схеме составляется характеристическое уравнение (1) системы.

2. Строятся траектории корней характеристического уравнения по известной методике [3]; ρ — параметр траекторий корней, отклоняющийся от идентичного значения. Остальные параметры считаются заданными.

3. На корневом годографе отмечаются точки, соответствующие идентичному значению ρ_0, т. е. корни идентичной системы. При изменении параметра ρ от идентичного значения ρ_0 корни будут перемещаться

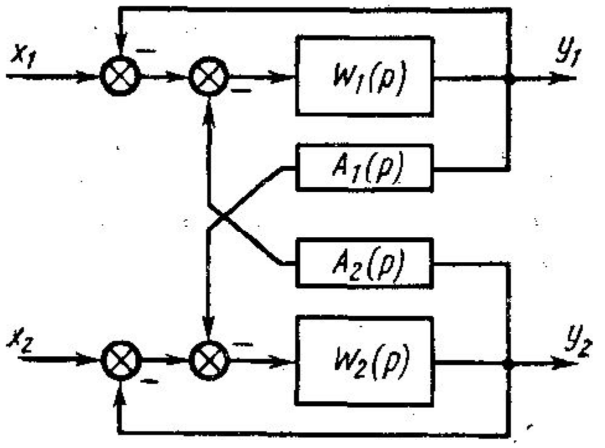

Рис. 1

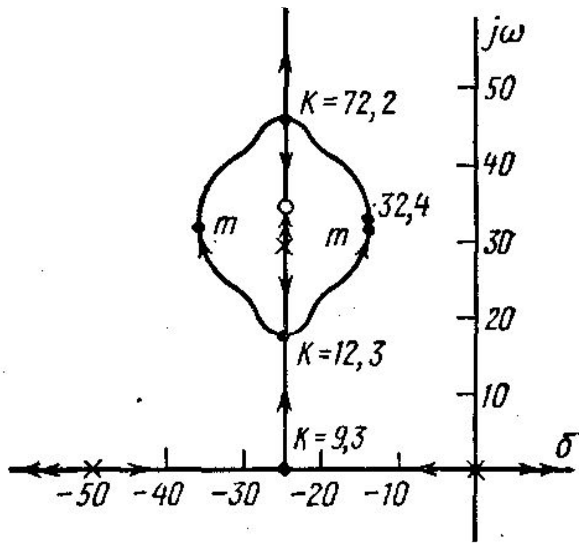

Рис. 2

по траекториям, при каждом $\rho \neq \rho_0$, давая совокупность корней неидентичной системы.

4. Определяется изменение степени устойчивости S при отклонении параметра ρ от значения ρ_0. Определяются значения параметра ρ, при которых степень устойчивости максимальна или минимальна и т. п.

5. Определяются пределы отклонения параметра ρ от идентичного значения ρ_0 в области устойчивости системы.

Для иллюстрации метода исследования рассмотрим неидентичность двумерной системы (см. рис. 1) по коэффициенту усиления основных каналов (k), по постоянным времени основных каналов (T) и по коэффициенту усиления каналов перекрестных связей (a).

Пусть передаточные функции основных каналов заданы в виде

$$W_1(p) = \frac{k_1}{p(1+T_1 p)}, \quad W_2(p) = \frac{k_2}{p(1+T_2 p)},$$

передаточные функции каналов связи в виде

$$A_1(p) = a_1, \quad A_2(p) = a_2,$$

где k_1, k_2 — коэффициенты усиления основных каналов, T_1, T_2 — постоянные времени основных каналов, a_1, a_2 — коэффициенты усиления каналов перекрестных связей.

Если $k_1 = k_2 = k_0$; $T_1 = T_2 = T_0$; $|a_1| = |a_2| = a_0$, то система является идентичной. Назовем систему неидентичной по параметру k, если $T_1 = T_2 = T_0$, $|a_1| = |a_2| = a_0$ и $k_1 = k_0 \neq k_2$, где T_0, a_0, k_0 — идентичные значения соответственно постоянных времени основных каналов, коэффициентов усиления каналов связи и коэффициентов усиления основных каналов. Аналогично определяется неидентичность по другим параметрам.

Неидентичность по коэффициенту усиления k основных блоков

По структурной схеме (рис. 1) составляем характеристическое уравнение

$$[1+W_1(p)]\,[1+W_2(p)]-A_1(p)\,A_2(p)\,W_1(p)\,W_2(p)=0. \qquad (2)$$

Подставляя в уравнение (2) выражения для передаточных функций при параметрах семейства $k_1=k_0=30$ *сек*, $T_1=T_2=T_0=0{,}02^1/сек$, $|a_1|=|a_2|=a_0=\sqrt{0{,}2}$ и параметре траекторий $k_2=\rho$, получим характеристическое уравнение в случае обратных антисимметричных перекрестных связей:

$$p\,(0{,}02\,p+1)\,(0{,}02p^2+p+30)+\rho\,(0{,}02p^2+p+36)=0, \qquad (3)$$

траектории корней которого изображены на рис. 2. (Траектории корней симметричны относительно действительной оси, поэтому на этом и следующих рисунках даны корневые годографы только в верхней полуплоскости p.) В точках m параметр ρ принимает идентичное значение $\rho_0=30$. При этом $S_0=|\delta_0|=14{,}1$. При увеличении ρ от $\rho_0=30$ степень устойчивости S незначительно уменьшается до $S_{\min}=14{,}0$ при $\rho=32{,}4$, а затем увеличивается $S_{\max}=25$ при $\rho=72{,}2$.

Таким образом, при относительном отклонении $\dfrac{\Delta\rho}{\rho}\geqslant 0{,}08$ степень устойчивости S увеличивается при увеличении ρ, что не согласуется с выводами, сделанными в работе [4]. Степень устойчивости остается постоянной: $S=S_{\max}=25$ при $\rho\geqslant 72{,}2$. При уменьшении ρ от $\rho_0=30$ степень устойчивости увеличивается до $S_{\max}=25$ при $\rho=12{,}3$, затем остается постоянной $S=S_{\max}=25$ при $12{,}3\geqslant\rho\geqslant 9{,}3$, далее уменьшается до нуля при $\rho\to 0$. При любом значении параметра $\rho>0$ система устойчива.

В характеристическое уравнение (2) входит произведение a_1a_2, поэтому полученные результаты (рис. 2) справедливы не только для идентичной по параметру a системы, но и в случае произвольных $|a_1|\neq|a_2|$ при условии $|a_1a_2|=0{,}2$.

Неидентичность по постоянным времени T основных блоков

Полагая параметры семейства $k_1=k_2=k_0=30^1/сек$, $|a_1|=|a_2|=a_0=\sqrt{0{,}2}$, $T_1=T_0=0{,}02$*сек* и параметр траекторий $\rho=\dfrac{1}{T_2}$, получим характеристическое уравнение в случае обратных антисимметричных перекрестных связей:

$$p^2\,(0{,}02p^2+p+30)+\rho\,(0{,}02p^3+1{,}6p^2+60p+1080)=0, \qquad (4)$$

траектории корней которого изображены на рис. 3. В точках m параметр ρ принимает идентичное значение $\rho_0=50$. При этом $S_0=15$. При увеличении ρ от ρ_0 до ∞ (т. е. уменьшении T_2 от $T_0=0{,}02$ до нуля) степень устойчивости увеличивается от $S_0=15$ до $S_{\max}=21$. При уменьшении ρ от ρ_0 до нуля (т. е. увеличении T_2 от T_0 до ∞) степень устойчивости уменьшается до $S_{\min}=0$. При любом конечном значении параметра T_2 система устойчива.

Неидентичность по коэффициенту усиления a каналов перекрестных связей

Полагая в уравнении (2) параметры семейства $k_1=k_2=k_0=30^1/сек$, $T_1=T_2=T_0=0{,}02^1/сек$, и параметр траекторий $\rho=-a_1a_2$, получим характеристическое уравнение

$$[0{,}02p^2 + p + 30]^2 + 900\rho = 0, \tag{5}$$

траектории корней которого изображены на рис. 4 (B — асимптоты траекторий.) Положительный годограф (обозначен одной стрелкой) соответствует случаю $\operatorname{sign} a_1 = -\operatorname{sign} a_2$ (отрицательный годограф обозначен двумя стрелками). Пусть параметр a_2 испытывает отклонение от идентичного значения a_0, положим $|a_1| = a_0 = 0{,}6$. Рассмотрим случай $\operatorname{sign} a_1 = -\operatorname{sign} a_2$ (перекрестные связи противоположных знаков).

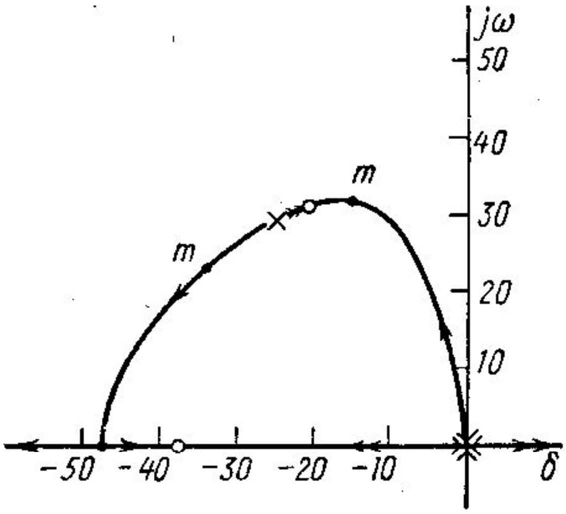

Рис. 3

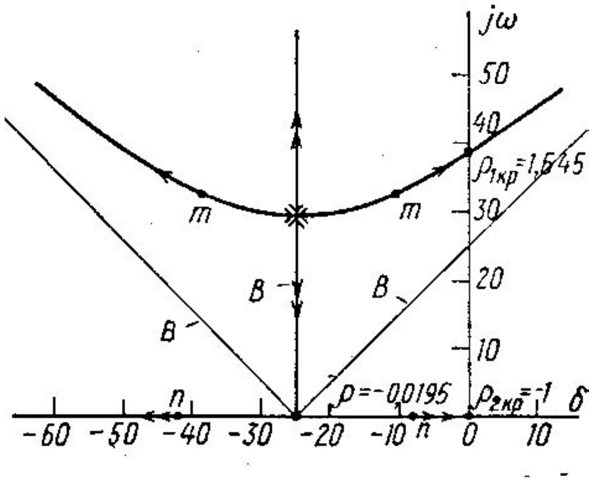

Рис. 4

Пусть $a_1 < 0$, $a_2 > 0$. В точках m параметр ρ принимает идентичное значение $\rho_0 = a_0^2 = 0{,}36$. При этом $S_0 = 11$. При увеличении ρ от $\rho_0 = 0{,}36$ до критического значения $\rho_{1\text{кр}} = 1{,}645$ (т. е. увеличении a_2 от $a_0 = 0{,}6$ до $a_{2\text{кр}} = \dfrac{\rho_{1\text{кр}}}{a_0} = 2{,}74$) степень устойчивости уменьшается от $S_0 = 11$ до нуля. При дальнейшем увеличении параметров ρ или a_2 система теряет устойчивость колебательно.

Аналогично рассматривается случай $\operatorname{sign} a_1 = \operatorname{sign} a_2$ (перекрестные связи одного знака). В этом случае $a_1 = a_0 = 0{,}6$, $a_2 > 0$. В точках n параметр ρ принимает идентичное значение $\rho_0 = -0{,}36$, при этом $S_0 = 8$. При увеличении a_2 от $a_0 = 0{,}6$ до критического значения $a_{2\text{кр}} = \dfrac{-\rho_{2\text{кр}}}{a_0} = 1{,}67$ степень устойчивости уменьшается от $S_0 = 8$ до нуля. При $a_2 > a_{2\text{кр}}$ система апериодически неустойчива. В области $0 < a_2 \leqslant 0{,}0325$ имеет место $S = S_{\max} = 25$.

Заметим, что каждое значение ρ соответствует бесконечному числу неидентичных по параметру a систем, таких, что $\rho = -a_1 a_2$, и единственной идентичной системе с идентичным значением $a_0' = \sqrt{|\rho|}$. Следовательно, неидентичная по параметру a система с передаточными функциями в каналах связей $A_1(p) = a_1 A(p)$; $A_2(p) = a_2 A(p)$ эквивалентна идентичной системе с передаточными функциями в каналах связей $A_1'(p) = a_0' A(p)$; $A_2'(p) = a_0' A(p)$ в случае a_1 и a_2 одного знака и $A_1'(p) = -a_0' A(p)$; $A_2'(p) = a_0' A(p)$ в случае a_1 и a_2 противоположных знаков, где a_0' — коэффициент усиления каналов связи эквивалентной идентичной системы вычисляется по формуле:

$$a_0' = \sqrt{|a_1 a_2|}\,. \tag{6}$$

Отсюда следует, что исследование неидентичной системы в этом случае сводится к анализу эквивалентной идентичной с коэффициентом усиления каналов связи a_0', определяемым по формуле (6). Заметим, что формула (6) является точной и справедлива для любого отклонения системы от идентичной в отличие от соответствующей формулы, приведенной в [4], являющейся приближенной и справедливой при достаточно малой неидентичности.

Таким образом, исследование неидентичной по коэффициенту усиления каналов связи двумерной системы приводится к анализу идентичной двумерной системы.

В работе рассмотрены примеры неидентичности линейных двумерных систем по коэффициенту усиления основных каналов, по постоянным времени основных каналов и коэффициенту усиления каналов связи. Однако по предложенной методике можно исследовать любые неидентичные системы. Для количественной оценки малой неидентичности линейной двумерной системы достаточно ограничиться лишь построением небольшой части корневого годографа в непосредственной близости от точек, изображающих корни идентичной системы.

Указанным методом могут быть также исследованы неидентичные двумерные системы с прямыми перекрестными связями одинаковых или разных знаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Огородникова В. И. «Автоматика и телемеханика», № 4, 1967.
2. Огородникова В. И. Реферат канд. дисс. МГУ, 1968.
3. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
4. Ахметгалеев И. И. Об оценке влияния малой неидентичности в линейных двухканальных системах. В тр. Казанского авиационного института, вып. 58, 1960.

Поступила в редакцию
21.4 1970 г.

Кафедра
физики колебаний