Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1971

УДК 539.293.011:2:535

М. А. ЭЛЬШАРНУБИ

О ПОГЛОЩЕНИИ СВЕТА СВОБОДНЫМИ ГОРЯЧИМИ НОСИТЕЛЯМИ ТОКА

В настоящей работе мы находим функцию распределения электронов в присутствии постоянного электрического поля и малопеременного поля. После определения функции распределения вычисляем коэффициент поглощения, который выражается через дифференциальную проводимость. Предполагается, что частота отвечает только поглощению на свободных носителях. Рассмотрены два случая, отвечающие слабому и произвольному разогреву носителей.

При движении электронов в газах или в полупроводниках в сильном постоянном электрическом поле они приобретают энергию, превышающую среднюю тепловую энергию газа или энергию решетки. В результате комплексная электропроводность, как и другие кинетические характеристики, оказывается зависящей от напряженности постоянного поля. Поглощение света определяется дифференциальной проводимостью.

В настоящей работе вычисляется коэффициент поглощения света в условиях нагрева электронного газа; предполагается, что частота отвечает только поглощению на свободных носителях. Предполагается далее, что рассеяние импульса и энергии носителей заряда обусловлено только их взаимодействием с акустическими фононами (в приближении малой неупругости). Закон дисперсии берется в простейшем виде $w_{\vec{p}}=\vec{p}^2/2m$.

Постановка задачи и основные уравнения

Пусть к полупроводнику приложено сильное постоянное электрическое поле $\vec{E}_0$ и кристалл освещается светом частоты ω (рис. 1), причем электрический вектор в волне $\vec{E}_1 e^{-i\omega t}$ параллелен $\vec{E}_0$, тогда суммарное электрическое однородное поле в кристалле будет

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}_1 e^{-i\omega t}, \quad E_1 \ll E_0.$$

Кинетическое уравнение запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e(\vec{E}, \vec{\nabla} p f) = J[f], \tag{1}$$

здесь $F = e\vec{E}$ — сила, действующая на частицы заряда e в электрическом поле напряженности E, J — интеграл столкновений.

Как обычно, представим функцию распределения в виде суммы симметричной и антисимметричной частей:

$$f = f_s + f_a,\quad f_s(\vec{p}) = f_s(-\vec{p});\quad f_a(\vec{p}) = -f_a(-\vec{p}).$$

Рис. 1

В данном случае:

$$f_s = f_s^0(w_{\vec{p}}) + f_s^1(w_{\vec{p}})\, e^{-i\omega t},\quad f_s^1(w_{\vec{p}}) \ll f_s^0(w_{\vec{p}}),$$

$$f_a = f_a^0(\vec{p}) + f_a^1(\vec{p})\, e^{-i\omega t},\quad f_a^1(\vec{p}) \ll f_a^0(\vec{p}).$$

Тогда уравнение (1) сводится к следующей системе:

$$e(\vec{E}_0, \vec{\nabla}_p f_a^0(\vec{p})) = J[f_s^0(w_{\vec{p}})], \tag{1а}$$

$$e(\vec{E}_0, \vec{\nabla}_p f_s^0(w_{\vec{p}})) = -\frac{1}{\tau(w_{\vec{p}})} f_a^0(\vec{p}), \tag{1б}$$

$$-i\omega f_s^1(w_{\vec{p}}) + e(\vec{E}_0, \vec{\nabla}_p f_a(\vec{p})) + e(\vec{E}_1, \vec{\nabla}_p f_a^0(\vec{p})) = J[f_s^1(w_{\vec{p}})], \tag{1в}$$

$$\left(-i\omega + \frac{1}{\tau(w_{\vec{p}})}\right) f_a^1(\vec{p}) + e(\vec{E}_0, \vec{\nabla}_p f_s^1(w_{\vec{p}})) + e(\vec{E}_1, \vec{\nabla}_p f_s^0(w_{\vec{p}})) = 0, \tag{1г}$$

здесь

$$J[f_s^0(w_{\vec{p}})] = \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{mp^3 kT}{lM}\frac{\partial f_s^0}{\partial p} + \frac{p^4}{lM} f_s^0\right],$$

$$J[f_s^1(w_{\vec{p}})] = \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{mp^3 kT}{lM}\frac{\partial f_s^1}{\partial p} + \frac{p^4}{lM} f_s^1\right],$$

$\tau(w_{\vec{p}})$ — время релаксации импульса $\vec{p}$, $w_{\vec{p}}$ — энергия носителя заряда, $M = \frac{kT}{v_s^2}$, v_s — скорость звука.

Решение уравнений (1а), (1б) хорошо известно[1], оно имеет вид

$$f_s^0(x) = C\exp[-x + \xi\ln(x+\xi)], \tag{2}$$

$$f_a^0(\vec{p}) = C\frac{el\vec{E}_0\vec{p}}{p}\frac{x}{kT}\exp[-x + (\xi - 1)\ln(x+\xi)]. \tag{3}$$

Здесь

$$x = \frac{p^2}{2mkT},\qquad \xi = \frac{kT}{6mv_s^2}\left(\frac{eE_0 l}{kT}\right)^2, \tag{4}$$

C — константа, определяемая условием нормировки

[1] Б. И. Давыдов. ЖЭФТ, 7, 1069, 1937.

$$n = 4\pi \int_0^\infty d\,p p^2 f_s^0 (w_{\vec{p}}).\qquad (5)$$

Наша задача сводится к вычислению функции $f_a^1(\vec{p})$, зная которую легко найти и искомый коэффициент поглощения.

Случай слабого разогрева

Рассмотрим ситуацию, когда постоянное поле не слишком сильное. В этом случае из условия

$$\gamma \sim \frac{e^2 E_0^2\, lm}{3\omega \bar{p}^3} \sim \frac{e^2 E_0^2\, l}{6\omega kT\sqrt{2mkT}} \sim \xi \frac{v_s}{v_T} \frac{v_s}{l\omega} \ll 1$$

следует

$$e\vec{E}_0, \vec{\nabla}_p f_s^1 (w_{\vec{p}}) \ll e\vec{E}_1, \vec{\nabla}_p f_s^0 (w_{\vec{p}}).$$

Следовательно, уравнение (1г) принимает вид

$$\left(-i\omega + \frac{1}{\tau(w_{\vec{p}})}\right) f_a^1(\vec{p}) + e(\vec{E}_1, \vec{\nabla}_p f_s^0 (w_{\vec{p}})) = 0.$$

С помощью (2) получаем

$$Re\, f_a^1(\vec{p}) = \frac{e\vec{E}_1\, \vec{p}\, \tau_0\, x^{-1/2}\, x(x+\xi)^{\xi-1}\, ce^{-x}}{mkT\,[1+(\omega\tau_0)^2 x^{-1}]},\qquad (6)$$

где $\tau = \tau_0 x^{-1/2}$, $x = (p^2/2mkT)$ — безразмерная переменная.

Плотность тока дается выражением

$$j = \frac{e}{m}\int d\vec{p}\,\vec{p}\, f_a^1(\vec{p})\, e^{-i\omega t},\qquad (7)$$

$$j = \sigma_d \vec{E}_1 e^{-i\omega t},$$

где σ_d — дифференциальная проводимость соответственно

$$Re\,\sigma_d = \frac{e}{m\vec{E}_1}\int d\vec{p}\,\vec{p}\, Re\, f_a^1(\vec{p}).\qquad (8)$$

Из (6) — (8) получаем

$$Re\,\sigma_d = \frac{2ne^2\tau_0}{3m}\cdot\frac{\int_0^\infty dx\, \frac{x^3(x+\xi)^{\xi-1}e^{-x}}{x+\omega^2\tau_0^2}}{\int_0^\infty dx\sqrt{x}\,(x+\xi)^{\xi}e^{-x}}.$$

Коэффициент поглощения света выражается через $Re\,\sigma_d$ следующим образом:

$$\alpha = \frac{4\pi}{C_0\sqrt{\varepsilon}} Re\,\sigma_d(\omega, E_0),\qquad (9)$$

здесь C_0 — скорость света в пустоте, ε — диэлектрическая проницаемость вещества. Таким образом:

$$\alpha = \frac{4\pi}{c_0\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{2ne^2\tau_0}{3m}\,I_0, \quad I = \frac{I_1}{I_2}, \tag{10}$$

$$I_1 = \int_0^\infty dx\,\frac{x^3(x+\xi)^{\xi-1}e^{-x}}{x+\omega^2\tau_0^2}, \quad I_2 = \int_0^\infty dx\,\sqrt{x}\,(x+\xi)^{\xi}e^{-x}. \tag{11}$$

Функция $I_0(\xi, \omega^2\tau_0^2)$ проанализирована в таблице и на рис. 2. В некоторых случаях, однако, удается получить и аналитическое выражение

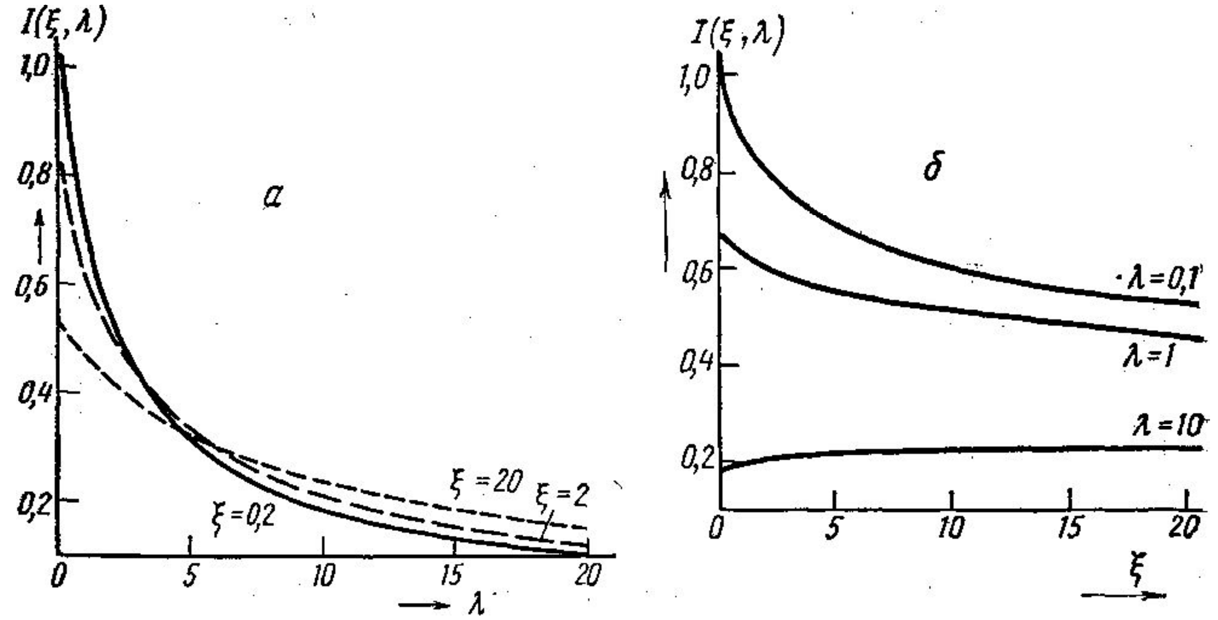

Рис. 2

для α. Пусть для начала параметр ξ представляет собой целое число (в рассматриваемом случае малого разогрева), не слишком большое. Тогда при $\omega\tau \gg 1$ и $\omega\tau \ll 1$ получаем[1]

$$\alpha = \frac{4\pi}{C_0\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{2ne^2\tau_0}{3m\omega^2\tau_0^2}\,\frac{\sum\limits_{k=0}^{\xi-1} C_k^{\xi-1}\xi^k\Gamma(\xi-1-k+4)}{\sum\limits_{k=0}^{\xi} C_k^{\xi}\xi^k\Gamma(\xi-k+3/2)}, \tag{12}$$

$$\alpha = \frac{4\pi}{C_0\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{2ne^2\tau_0}{3m}\,\frac{\sum\limits_{k=0}^{\xi-1} C_k^{\xi-1}\xi^k\Gamma(\xi-1-k+3)}{\sum\limits_{k=0}^{\xi} C_k^{\xi}\xi^k\Gamma(\xi-k+3/2)}. \tag{13}$$

Далее рассмотрим случай $\xi \ll 1$. При $\omega\tau \gg 1$ получаем

---

[1] $C_k^{\xi} = \dfrac{\xi!}{k!\,(\xi-k)!}$; $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}dt$.

$$\alpha = \frac{16\pi n e^2 \tau_0}{C_0 \sqrt{\varepsilon}\, 3m\omega_0^2 \tau_0^2} (\xi + 1) \frac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(\xi+3/2)}. \tag{14}$$

С другой стороны, при $\omega\tau \ll 1$ получается стандартная формула теории статической электропроводности:

$$\alpha = \frac{8\pi n e^2 \tau_0}{C_0 \sqrt{\varepsilon}\, 3m} \frac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(\xi+3/2)}, \tag{15}$$

$$I_0(\xi, \lambda) = \frac{\int\limits_0^\infty dx \frac{x^3 (x+\xi)^{\xi-1} e^{-x}}{x+\lambda}}{\int\limits_0^\infty dx \sqrt{x} (x+\xi)^{\xi} e^{-x}}; \quad \lambda = \omega^2 \tau_0^2.$$

λ \ ξ	0,2	0,5	1	1,5	2	5	10	20
0,05	1,008	0,9455	0,881	0,834	0,805	0,694	0,610	0,530
0,1	0,976	0,920	0,861	0,821	0,799	0,685	0,604	0,526
0,25	0,898	0,855	0,809	0,775	0,750	0,659	0,586	0,514
0,5	0,799	0,771	0,734	0,713	0,694	0,621	0,560	0,496
1	0,664	0,651	0,633	0,619	0,608	0,560	0,514	0,464
5	0,302	0,308	0,3145	0,318	0,321	0,325	0,324	0,3165
10	0,183	0,189	0,197	0,202	0,206	0,218	0,2255	0,230
20	0,103	0,108	0,113	0,117	0,121	0,132	0,1415	0,1505

Случай произвольного разогрева при высоких частотах

Предполагаем, что частота падающего света велика. Как обычно, $\omega\tau \gg 1$. Положим

$$f_a^{\circ}(\vec{p}) = \frac{\vec{p}\vec{f}_a^{\circ}}{p}, \qquad f_a^1(\vec{p}) = \vec{p}\vec{E}_1 \chi(w_{\vec{p}}). \tag{16}$$

Подставим (16) в уравнения (1в) и (1г) и умножим их на $\sin\theta\, d\theta$ и $\sin\theta\cos\theta\, d\theta$. Интегрируя затем по θ в пределах от 0 до π, получим после простых преобразований:

$$-2i\omega mkTx f_s^1(x) + 2mkTx(eE_0E_1\chi(x)) +$$

$$+ (2mkTx)^2 \frac{eE_0E_1}{3mkT} \frac{\partial}{\partial x} \chi(x) - \frac{(2mkTx)^{\frac{1}{2}}}{mkT} \frac{\partial}{\partial x} \times$$

$$\times \left[\frac{(2mkTx)^2}{eM} \frac{\partial}{\partial x} f_s^1(x) + \frac{(2mkTx)^2}{lM} f_s^1 \right] =$$

$$= -\frac{e}{3} \frac{(2mkTx)^{\frac{1}{2}}}{mkT} \frac{\partial}{\partial x} (2mkTx\vec{E}_1\vec{f}_a^{\circ}), \tag{16'}$$

$$\chi(x) = -\frac{\tau(x)}{E_1(1 - i\omega\tau(x))} \left[\frac{eE_0}{mkT} \frac{\partial}{\partial x} f_s^1(x) + \frac{eE_1}{mkT} \frac{\partial}{\partial x} f_s^{\circ}(x) \right]. \tag{17}$$

Здесь, как и раньше, введена безразмерная переменная $x = \frac{p^2}{2mkT}$. Комбинируя уравнения (16') и (17), находим

$$\left\{\frac{2x(2mkTx)^{\frac{1}{2}}}{lM} + \frac{2(eE_0)^2 x\tau}{3mkT(1-i\omega\tau)}\right\}\frac{\partial^2 f_s^1}{\partial x^2} +$$

$$+\left\{\frac{(eE_0)^2\tau}{mkT(1-i\omega\tau)} + \frac{2}{3}\frac{(eE_0)^2}{mkT}x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau}{(1-i\omega\tau)} + \frac{4(2mkTx)^{\frac{1}{2}}}{lM} +\right.$$

$$\left. + \frac{2x(2mkTx)^{\frac{1}{2}}}{lM}\right\}\frac{\partial f_s^1}{\partial x} + \left(i\omega + \frac{4\sqrt{2mkTx}}{lM}\right)f_s^1 = -\frac{G(x)}{2mkTx}, \qquad (18)$$

где

$$G(x) = -\frac{e\vec{E}_1(2mkT)^{\frac{3}{2}}}{3mkT}\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial x}x\vec{f}_a^{\circ}(x) + \frac{2e^2E_0E_1\tau mkT}{mkT(1-i\omega\tau)}\times$$

$$\times x\frac{\partial}{\partial x}\overset{\circ}{f}_s + \frac{4}{3}e^2E_0E_1x^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau}{1-i\omega\tau}\frac{\partial}{\partial x}\overset{\circ}{f}_s. \qquad (19)$$

Помимо условия $\omega\tau \gg 1$ допустим также, что выполняются неравенства

$$\frac{(eE_0)^2 lM}{4\sqrt{2}[\omega(mkT)^{3/2}]} \gg 1 \quad \text{и} \quad \frac{\omega lM}{4\sqrt{2mkT}} \gg 1.$$

Фактически это означает, что можно пренебречь $I[f_s^1(x)]$ по сравнению с $\frac{f_s^1}{t_E}$, где t_E — период переменного поля, при этом время релаксации по энергии много больше, чем период переменного поля.

В указанных условиях (18) примет вид

$$2x\frac{\partial^2 f_s^1}{\partial x^2} + 3\frac{\partial f_s^1}{\partial x} + bf_s^1(x) = Y(x), \qquad (20)$$

где

$$b = \frac{3\omega^2 mkT}{(eE_0)^2} \gg 1.$$

$$Y(x) = -\frac{3i\omega mkT}{(eE_0)^2}\left\{\frac{2e\vec{E}_1 mkT}{3\sqrt{2x}(mkT)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial x}x\vec{f}_a^{\circ}(x) -\right.$$

$$\left. -\frac{ie^2E_0E_1}{\omega mkT}\frac{\partial}{\partial x}\overset{\circ}{f}_s(x) - \frac{ie^2E_0E_1 2x}{3\omega mkT}\frac{\partial^2 \overset{\circ}{f}_s(x)}{\partial x^2}\right\}. \qquad (21)$$

Интересующее нас решение (20) должно быть нормировано в интервале $0 \leqslant x \leqslant \infty$ и не должно иметь особенности при $x = 0$. Это решение имеет вид

$$f_s^1(x) = \frac{2}{\sqrt{2bx}} \int_0^x dx' x' Y(x') \sin \sqrt{2b} (\sqrt{x} - \sqrt{x'}) \tag{22}$$

или с учетом (21)

$$Re f_s^1(x) = -\frac{2E_1}{\sqrt{2bx}E_0} \int_0^x dx' x' \sin \sqrt{2b} (\sqrt{x} - \sqrt{x'}) \times$$

$$\times \left[3 \frac{\partial}{\partial x'} \overset{\circ}{f}_s(x') + 2x' \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \overset{\circ}{f}_s(x') \right], \tag{23}$$

$$Im f_s^1(x) = -\frac{2\sqrt{2mkT}\, \omega e\vec{E}_1}{\sqrt{2bx}\,(eE_0)^2} \int_0^x dx' \sqrt{x'} \sin \sqrt{2b} (\sqrt{x} - \sqrt{x'}) \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial x'} (x' \vec{\overset{\circ}{f}}_a(x') \right]. \tag{24}$$

В рассматриваемых условиях функция $\frac{1}{\sqrt{x'}} \sin \sqrt{2b} (\sqrt{x} - \sqrt{x'})$ быстро осциллирующая. Вынося медленно меняющиеся величины из-под интегралов (23) и (24), получим

$$Re f_s^1(x) \cong -\frac{4E_1}{2bE_0} x \left\{ 3 \frac{\partial}{\partial x} \overset{\circ}{f}_s(x) + 2x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overset{\circ}{f}_s(x) \right\}, \tag{25}$$

$$Im f_s^1(x) \cong -\frac{4\omega e\vec{E}_1 (2mkTx)^{\frac{1}{2}}}{2b\,(eE_0)^2} \frac{\partial}{\partial x} [x \vec{\overset{\circ}{f}}_a(x)]. \tag{26}$$

Равенство (1г) дает

$$Re f_a^1(\vec{p}) = -\frac{e\vec{E}_0\vec{p}}{\omega^2 \tau mkT} \frac{\partial}{\partial x} Re f_s^1(x) +$$

$$+ \frac{e\vec{E}_0\vec{p}}{\omega mkT} \frac{\partial}{\partial x} Im f_s^1(x) - \frac{e\vec{E}_1\vec{p}}{\omega^2 \tau mkT} \frac{\partial}{\partial x} \overset{\circ}{f}_s(x). \tag{27}$$

Для коэффициента поглощения с учетом (7) получаем

$$\alpha = \frac{4\pi}{C_0 \sqrt{\varepsilon}} \left\{ -\frac{8\pi e^2 (mkT)^{\frac{3}{2}} (4\sqrt{2})\, 6}{\omega^2 \tau_0 b 3m} \int_0^\alpha dx x \overset{\circ}{f}_s(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{16\sqrt{2}\, e^2 \pi\, (mkT)^{\frac{3}{2}}}{3\omega^2 \tau_0 m} \int_0^\alpha dx \overset{\circ}{f}_s(x) - \frac{16\,(mkT)^2 \pi e}{bmE_0} \int_0^\infty dx x \overset{\circ}{f}_a(x) \right\}. \tag{28}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\xi \gg 1$. Тогда согласно (2) и (3)

$$\overset{\circ}{f}_s(x) = Ce^{-(x^2/2\xi)} \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{f}_a(x) = \frac{CelE_0 x}{kT\xi} e^{-(x^2/2\xi)}.$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{4\pi}{C_0 \sqrt{\varepsilon}} \left[\frac{4e^2 n\, (2\xi)^{1/4}}{3m\omega^2 \tau_0 \Gamma(3/4)} \left\{ 1 - \frac{12}{b} - \frac{3\Gamma\,(3/2)\sqrt{2\xi}\, mv_s^2}{kT} \right\} \right].$$

В этом случае коэффициент поглощения α меняет знак при значении $\frac{m}{m_0} = \frac{8T}{3\sqrt{\pi\xi}}$, где T — температура решетки в градусах Кельвина.

Заметим, что T в нашем расчете ограничена условием

$$\sqrt{\xi k T} \ll \hbar\nu, \tag{29}$$

здесь ν — частота оптических фононов.

Условие (29) означает, что взаимодействием электронов с оптическими фононами можно пренебречь.

Слабое постоянное поле E_0 ($\xi \ll 1$). При этом в силу (2) и (3)

$$\overset{\circ}{f}_s(x) = Ce^{-x+\xi\ln x},$$

$$\overset{\circ}{f}_s(x) = \frac{CelE_0}{kT}\left(1 - \frac{\xi}{x}\right)e^{-x+\xi\ln x}.$$

Для α вновь получается формула (14).

2. ξ — целое число. Тогда все интегралы явно вычисляются и (с учетом, что $b \gg 1$) вновь получается результат (12).

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю В. Л. Бонч-Бруевичу.

Поступила в редакцию
6.5 1970 г.

Кафедра
полупроводников