

О. Д. АХМАТОВА, Г. А. БЕНДРИКОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исследуются общие свойства траекторий корней характеристического уравнения (1) систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. Получено основное фазовое уравнение и формула параметра. Рассмотрим пример.

Исследование динамики систем, содержащих наряду с сосредоточенными параметрами распределенный элемент конечной длины, часто приводит к исследованию корней характеристического уравнения вида

$$\Phi_n(p) \operatorname{ch} \gamma(p) l + K_0 \Psi_m(p) \frac{\operatorname{sh} \gamma(p) l}{\gamma(p) l} = 0, \quad (1)$$

где $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ — полиномы p степени n и m соответственно, $\gamma(p)$ — постоянная распространения, l — длина распределенного элемента, K_0 — некоторый действительный параметр, допускающий изменение в широких пределах. Параметр K_0 может иметь разный физический смысл в зависимости от вида рассматриваемой системы.

Постоянная распространения $\gamma(p)$ для длинных электрических линий с учетом всех потонных параметров L, C, R, G определяется так

$$\gamma(p) = \sqrt{(Lp + R)(Cp + G)}. \quad (2)$$

Для электрических линий без утечки, а также в случае гидравлических и пневматических линий [1, 2, 3] с учетом потерь запишем

$$\gamma(p) l = \tau \sqrt{p(p + \alpha)}, \quad (3)$$

τ — постоянная запаздывания, α — пропорциональна потерям в системе (омическое сопротивление линии, кинематическая вязкость, внутреннее трение).

Часто рассматривают длинные линии без учета потерь и дисперсии. Тогда $\gamma(p) l = \rho \tau$, где τ — время распространения сигнала по длинной линии.

Определение корней уравнения (1) представляет собой чрезвычайно трудоемкую задачу. Применение метода траекторий корней к уравнению (1) позволяет геометрически оценивать области расположения корней

характеристического уравнения (1) на плоскости комплексных частот p , проследить изменение корней с изменением действительного параметра K_0 , выделить доминирующие корни, т. е. корни, определяющие в основном динамику исследуемой системы.

Воспользовавшись теоремой Вейерштрасса [4], заменим в уравнении (1) гиперболические функции их разложения в бесконечные произведения. Тогда это уравнение можно записать в виде

$$\prod_{v=1}^n (p - p_v) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4\gamma^2(p) l^2}{(2k-1)^2 \pi^2}\right) + K \prod_{\mu=1}^m (p - z_\mu) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma^2(p) l^2}{k^2 \pi^2}\right) = 0, \quad (4)$$

$K = K_0 \frac{b_0}{a_0}$ (b_0, a_0 — коэффициенты при старших степенях p полиномов $\Psi_m(p)$ и $\Phi_n(p)$), p_v, z_μ — нули полиномов $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$.

Исследуем, как изменяются корни уравнения (4) при непрерывном изменении K .

При $K=0$ корни уравнения (4) равны

$$p = p_v \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

и решением x_k системы квадратных уравнений будет

$$\gamma^2(p) l^2 + \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для определенности пусть $\gamma(p)$ имеет вид (3). Тогда

$$x_k = -\frac{\alpha}{2} + j \sqrt{\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4\tau^2} - \frac{\alpha^2}{4}}, \quad (5)$$

$$x_k^* = -\frac{\alpha}{2} - j \sqrt{\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4\tau^2} - \frac{\alpha^2}{4}}.$$

При $K \rightarrow \infty$ корни уравнения (4) определяются как

$$p = z_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

и решением y_k системы квадратных уравнений будет

$$\gamma^2(p) l^2 + k^2 \pi^2 = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

т. е.

$$y_k = -\frac{\alpha}{2} + j \sqrt{\frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} - \frac{\alpha^2}{4}}, \quad (6)$$

$$y_k^* = -\frac{\alpha}{2} - j \sqrt{\frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} - \frac{\alpha^2}{4}}.$$

Точки p_v, x_k, x_k^* — называются начальными точками траекторий корней, точки z_μ, y_k, y_k^* — предельными.

При непрерывном изменении K от нуля до $\pm\infty$ корни уравнения (1) описывают на плоскости комплексных частот непрерывные траекто-

рии, начинающиеся в начальных точках и заканчивающиеся в предельных точках или уходящие в бесконечность.

Пусть $p = \tilde{p}$ — корень уравнения (1). Тогда при $p = \tilde{p}$ уравнение (4) превращается в тождество

$$-K \equiv \frac{\prod_{v=1}^n |\tilde{p} - p_v| \prod_{k=1}^{\infty} |\tilde{p} - x_k| |\tilde{p} - x_k^*|}{\prod_{\mu=1}^m |\tilde{p} - z_{\mu}| \prod_{k=1}^{\infty} |\tilde{p} - y_k| |\tilde{p} - y_k^*|} \exp j \left\{ \sum_{v=1}^n \varphi_v + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k + \xi_k^*) - \sum_{\mu=1}^m \psi_{\mu} - \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k + \eta_k^*) \right\}, \quad (7)$$

$\varphi_v, \xi_k, \xi_k^*$ — углы, образованные векторами, проведенными в точку \tilde{p} из начальных точек p_v, x_k, x_k^* соответственно, с положительным направлением действительной оси;

$\psi_{\mu}, \eta_k, \eta_k^*$ — углы, образованные векторами, проведенными в точку p из предельных точек z_{μ}, y_k, y_k^* , с положительным направлением действительной оси.

Поскольку K — действительный параметр, то из (7) следует:

$$\sum_{v=1}^n \varphi_v - \sum_{\mu=1}^m \psi_{\mu} + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k + \xi_k^*) - \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k + \eta_k^*) = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \dots \quad (8)$$

Причем положительным K соответствуют нечетные значения N , отрицательным K — четные N .

Следовательно, только те точки комплексной плоскости являются корнями исходного уравнения (4), для которых справедливо основное фазовое уравнение (8).

Таким образом, применением метода траекторий корней исследования корней трансцендентного уравнения вида (1) можно свести к построению траекторий корней, имеющих бесконечное (но счетное) число начальных и предельных точек.

Основные свойства траекторий корней и правила их построения для уравнений конечного порядка (имеющих конечное число начальных и предельных точек) хорошо известны [5, 6]. Перечислим те из них, которые остаются справедливыми и для случая, когда исследуемое уравнение имеет бесконечное число начальных и предельных точек. Такими свойствами являются: симметричность относительно действительной оси; независимость траекторий от положения мнимой оси; подобие конфигурации траекторий при изменении масштаба, возможность переноса начальных точек и принадлежность действительной оси траекториям, причем разбиение действительной оси на четные и нечетные ветви траекторий (число их конечно) определяется только действительными начальными и предельными точками. Отрезки действительной оси, справа от которых расположено нечетное (четное) общее число действительных начальных и предельных точек, принадлежат нечетным (четным) ветвям траекторий.

Рассмотрим положение начальных и предельных точек исследуемого трансцендентного уравнения (4). Точки p_v и z_{μ} определяются свойствами, входящих в систему сосредоточенных элементов. Точки x_k и y_k связаны с характеристиками распределенного элемента. Рассмотрим

случай $\alpha\tau < \pi$. Тогда x_k, x_k^* и y_k, y_k^* комплексно-сопряженные и лежат на одной вертикальной прямой $\delta = -\frac{\alpha}{2}$ слева от мнимой оси. Начальные и предельные точки чередуются ($Imx_1 < Imy_1 < Imx_2 < \dots$).

Если в рассматриваемой линии и можно пренебречь потерями ($\alpha=0$), то точки x_k и y_k располагаются эквидистантно на мнимой оси

$$x_k = j \frac{(2k-1)\pi}{2\tau},$$

$$y_k = j \frac{k\pi}{\tau}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для линий с отрицательным притоком ($\alpha < 0$) (или распределенного туннельного диода, например) x_k и y_k будут находиться справа от мнимой оси [7].

В качестве примера рассмотрим уравнение, описывающее гидравлические или пневматические системы высокого давления с длинными линиями между управляющим клапаном и приводом [2]:

$$(p^2 + 2\xi_0\omega_0 p + \omega_0^2) \operatorname{ch} \gamma(p)l + Kp^2 \frac{\operatorname{sh} \gamma(p)l}{\gamma(p)l} = 0, \quad (9)$$

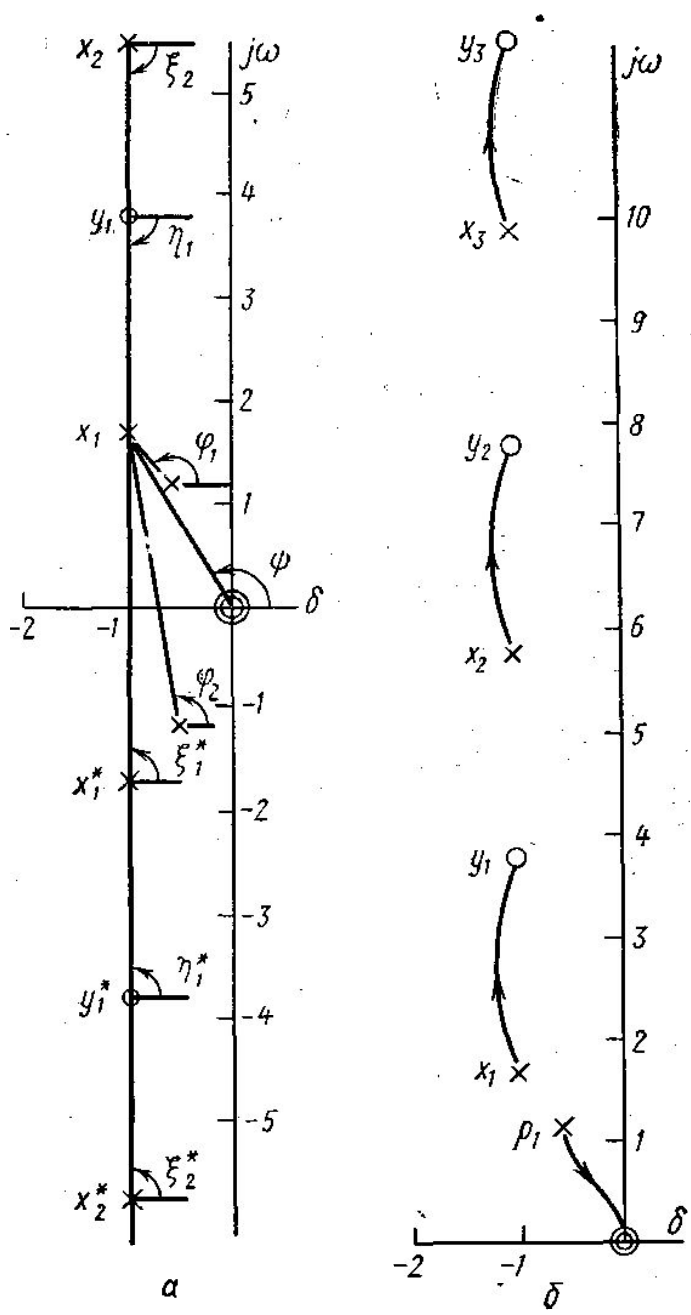
где $K > 0$ (отношение объема трубопровода к объему цилиндра привода).

В соответствии с (5) и (6) на рис. показано положение корней уравнения (9). Крестиком, как обычно, показаны начальные, кружком — предельные точки. Фазовое уравнение (8) позволяет просто определить направление выхода траекторий из точек x_k при увеличении K от нуля. Запишем уравнение (8) для точки x_1 . В этом случае:

$$\xi_k = -\frac{\pi}{2}, \quad (k = 2, 3, \dots); \quad \xi_k^* = \frac{\pi}{2}, \quad \eta_k = -\frac{\pi}{2},$$

$$\eta_k^* = \frac{\pi}{2}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(см. рис.).



Тогда из уравнения (8) для угла выхода ξ_1 из точки x_1 имеем:

$$\xi_1 = \frac{\pi}{2} - (\varphi_1 + \varphi_2 - 2\psi). \quad (10)$$

Углы $\varphi_1, \varphi_2, \psi$, как видно из рис., можно непосредственно измерить и соответственно найти угол выхода траектории из начальной точки x_1 .

Аналогично получаются углы выхода из остальных начальных точек x_k и углы входа траекторий в предельные точки y_k .

Очевидно, что углы выхода для достаточно удаленных начальных точек определяются по формуле

$$\xi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} - (n - m) \frac{\pi}{2},$$

где n и m — порядок полиномов $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$. Для систем класса $n=m$ угол $\xi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$, и, следовательно, при увеличении K от нуля действительная часть достаточно удаленных корней не изменяется, а мнимая часть возрастает.

Простейшие измерения для определения углов выхода и входа (10) позволяют непосредственно оценить, справа или слева от линии $\delta = -\frac{\alpha}{2}$ лежат соответствующие ветви траекторий корней или имеет место пересечение этой линии.

Направление выхода траекторий из точек p_1, p_2 также несложно оценить простыми измерениями, ограничиваясь несколькими ближайшими точками x_k, y_k , поскольку вклад от достаточно удаленных начальных и предельных точек незначителен вследствие того, что они комплексно-сопряженные и чередуются. Пользуясь основным фазовым уравнением (8), можно построить траектории корней не только вблизи начальных и предельных точек, но и в любой области плоскости комплексных частот p , ограничиваясь конечным числом членов уравнения (8). В зависимости от того, в какой области комплексной плоскости строится траектория, производится оценка учитываемых и неучитываемых членов уравнения (8).

На рис. (б) показаны траектории корней уравнения (9) при следующих значениях параметров: $\xi_0 \omega_0 = 0,6$; $\omega_0^2 = 1,8$; $\gamma(p)l = 0,8 \sqrt{p(p+2)}$. Такая система устойчива при всех $K > 0$. С ростом K степень устойчивости, определяемая корнем, выходящим из точки p_1 , убывает. Действительная часть корней, выходящих из точек x_k с ростом K от нуля, почти постоянна, а мнимая часть этих корней возрастает.

Отметим, что при исследовании решений трансцендентного уравнения (1) с помощью фазового уравнения (8) строятся траектории корней уравнения (1), соответствующие всем значениям K от нуля до ∞ . Значение K , соответствующее определенной точке траекторий p , находим из (1), которое превращается в формулу

$$\frac{1}{K} = \operatorname{Re} \left(\frac{\Psi_m(\tilde{p})}{\Phi_n(\tilde{p})} \frac{\operatorname{th} \gamma(\tilde{p})l}{\gamma(\tilde{p})l} \right).$$

Таким образом, применение метода траекторий корней позволяет быстро и просто исследовать расположение на комплексной плоскости p корней трансцендентного уравнения вида (1), определить число действительных корней и оценить влияние изменения параметра K на положение корней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Круг К. А. Переходные процессы в линейных электрических цепях. ГЭИ, 1948.
2. Стоун А. К. Исследование влияния длинных линий между управляющим клапаном и приводом в гидравлических и пневматических системах управления. Труды I Конгресса ИФАК, Технические средства автоматизации. Изд-во АН СССР, 1961.
3. Oldenburger R., Goodson R. E. Hydraulic Line Dynamics. Autom. and Remote Control, London, Butterworths, 1964.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
5. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
6. Траксел Дж. Синтез систем автоматического регулирования. М., Машгиз, 1959.
7. Ахматова О. Д., Воронцов Ю. И. «Радиотехника и электроника», 16, № 4, 1971.

Поступила в редакцию
12.6 1970 г.

Кафедра
физики колебаний