Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1971

УДК 531.19

П. Б. ПОДОСЕНОВ

О СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ В КОВАРИАНТНОЙ СТАТИСТИКЕ

В статье рассматривается ковариантное статистическое уравнение непрерывности для некоторых конкретных метрик в общей теории относительности. Показано, что степенное и экспоненциальное распределение частиц по скоростям как решения уравнения непрерывности существуют в метрике Шварцшильда и в обобщенных метриках Фридмана. В равномерно вращающейся системе отсчета существует только экспоненциальное распределение частиц по скоростям.

Согласно [1] ковариантная статистика с аппаратом дифференцирования Картана необходима в римановом пространстве для формулировки статистических законов сохранения для функции распределения $f(x^\alpha, u^\alpha)$, зависящей от четырех координат x^α и четырех скоростей u^α. В работах [1, 2] было получено степенное распределение частиц по скоростям как решение общековариантного уравнения непрерывности:

$$\widetilde{D}iv_r uf + div_u \left\langle \frac{\widetilde{D}u}{d\tau} \right\rangle f = 0,$$
$$\left(\widetilde{D}iv_r uf = u^\alpha \widetilde{D}_\alpha f + f \widetilde{D}_\alpha u^\alpha, \quad \widetilde{D}_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial u^\sigma} \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} u^\gamma\right) \tag{1}$$

при предположении, что новая степень свободы u^0, входящая в $f(x^\alpha, u^\alpha)$ и в уравнение (1), является случайной величиной, статистически независимой от остальных компонентов $u^i (i=1, 2, 3)$ вектора скорости u^α.

Выступающие в уравнении (1) ковариантные производные $\widetilde{D}iv_r uf$, $\widetilde{D}_\alpha f$, $\widetilde{D}_\alpha u^\alpha$ берутся по правилам дифференцирования Картана. $\left\langle \frac{\widetilde{D}u}{d\tau} \right\rangle$ — средние величины ускорений, которые должны быть заданы извне.

В работе [3] было показано, что при том же предположении и тех же условиях стационарности, изотропности в пространстве скоростей и отсутствии сил $\left\langle \frac{\widetilde{D}u}{d\tau} \right\rangle = 0$ кроме степенного закона распределения существует экспоненциальное распределение частиц по скоростям, включающее новую степень свободы u^0. В реальных условиях на распределение частиц по скоростям могут оказывать влияние вращение галактик, гравитационные поля, расширение пространственных масштабов вселенной и т. д. В связи с этим интересны исследования решения уравнения (1) для некоторых частиц метрик четырехмерного пространства — времени. В частности, в настоящей статье рассмотрены метрика равномерно вращающейся системы отсчета, метрика Шварцшильда и обобщенная метрика Фридмана.

Метрика равномерно вращающейся системы отсчета (в цилиндрических координатах r, φ и z) имеет вид

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2 r^2)\,dt^2 - 2\omega r^2\,d\varphi\,dt - dz^2 - r^2\,d\varphi^2 - dr^2,$$

$$g_{00} = 1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -1,$$

$$g^{00} = 1, \quad g^{11} = -1, \quad g^{33} = -1, \quad g^{22} = -\frac{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}{r^2},$$

$$g_{02} = -\frac{\omega r^2}{c}, \quad g^{02} = -\frac{\omega}{c}, \quad \Gamma^1_{20} = -\frac{\omega r}{c},$$

$$\Gamma^2_{10} = \frac{\omega}{rc}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^1_{00} = -\frac{\omega^2 r}{c}, \quad \Gamma^1_{22} = -r.$$

Подставляя найденные символы Кристоффеля в уравнение (1), получим

$$u_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{2\omega\, u_\varphi\, u^0}{c}\frac{\partial f}{\partial u_r} + \frac{\omega^2 r}{c^2}(u^0)^2 \frac{\partial f}{\partial u_r} -$$

$$- \frac{2\omega u_r u^0}{c}\frac{\partial f}{\partial u_\varphi} - \frac{u_r u_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial u_\varphi} + \frac{u_\varphi^2}{r}\frac{\partial f}{\partial u_r} = 0. \qquad (2)$$

В полученном уравнении исчезли члены вида $\Gamma^0_{ik} u^i u^k \frac{\partial f}{\partial u^0}$. Такое исчезновение обусловлено появлением инерциальных сил во вращающейся системе отсчета. Экспоненциальное решение (2) при $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ имеет вид

$$f = f_0 \exp\left\{\frac{m}{2\theta}\,\frac{r^2\omega^2 (u^0)^2}{c^2}\right\} \exp\left\{-\frac{m u_r^2}{2\theta}\right\} \exp - \left\{\frac{m u_\varphi^2}{2\theta}\right\}. \qquad (3)$$

При $dt = d\tau$ получаем классическое распределение во вращающейся системе отсчета. Степенное распределение отсутствует, так как в уравнении (2) исчезла новая степень свободы u^0.

Рассмотрим метрику Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2\,dt^2 - r^2(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad r_g < r,$$

где $r_g = \frac{2kM}{c^2}$ — гравитационный радиус тела.

Вычисляя коэффициенты Кристоффеля и подставляя их в (1), получим следующее уравнение:

$$\sqrt{\frac{r-r_g}{r}}\,u_r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}+\sqrt{\frac{r-r_g}{r}}\times$$
$$\times\left(\frac{u_\theta^2+u_\varphi^2}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial u_r}+\left(-\frac{u_\theta u_r}{r}\sqrt{\frac{r-r_g}{r}}+\frac{u_\varphi^2}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)\frac{\partial f}{\partial u_\theta}+$$
$$+\left(-\frac{u_r u_\varphi}{r}\sqrt{\frac{r-r_g}{r}}-\frac{u_\theta u_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)\frac{\partial f}{\partial u_\varphi}-\frac{r_g}{r(r-r_g)}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{r-r_g}{r}}\,u_r\frac{\partial f}{\partial u^0}-\frac{1}{2}\frac{r_g(r-r_g)}{r^3}\sqrt{\frac{r}{r-r_g}}\,(u^0)^2\frac{\partial f}{\partial u_r}=0, \tag{4}$$
$$u_r=\sqrt{\frac{r}{r-r_g}}\frac{dr}{d\tau},\quad u_\theta=r\frac{d\theta}{d\tau},\quad u_\varphi=r\sin\theta\frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Будем искать решение этого уравнения в таком виде:

$$f=\rho(r)\,\Phi\left(\frac{u^2}{(u^0)^2 g_{00}}\right)F(r^2\sin^2\theta,\ u_\varphi^2). \tag{5}$$

При подстановке (5) в уравнение (4) функции ρ и Φ находятся методом разделения переменных. Функция F также определяется из уравнения (4): $F=F(r^2\sin^2\theta\, u_\varphi^2)$. Для конкретизации функции F наложим на решение (5) следующие условия:

$F(0)=1$, так как при $I_\varphi^2=r^2\sin^2\theta u_\varphi^2=0$

должно быть изотропное распределение в пространстве скоростей;

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f du_\varphi<\infty$ — условие нормировки функции распределения;

при $c\to\infty$ f должна переходить в классическую экспоненциальную функцию Оорта при $\omega=0$ [1];

$f>0$.

Все эти условия удовлетворяются, если функцию F выбрать в виде

$$F=\left(1+\frac{A\frac{\theta}{m}r^2\sin^2\theta\,u_\varphi^2}{c^2}\right)^{-\frac{mc^2}{\theta}},$$

где $A>0$ есть постоянная Оорта [1].

Окончательно получаем:

$$f(r,\ \theta,\ \varphi,\ u^2,\ u^0)=f_0\left(\frac{r-r_g}{r}\right)^{-\frac{mc^2}{\theta}}\left(1-\frac{u^2}{(u^0)^2\frac{r-r_g}{r}}\right)^{\frac{mc^2}{2\theta}}\times$$
$$\times\left(1+\frac{A\frac{\theta}{m}r^2\sin^2\theta\,u_\varphi^2}{c^2}\right)^{-\frac{mc^2}{\theta}}. \tag{6}$$

Здесь f_0 — нормировочная постоянная.

Чтобы перейти к классической функции распределения [1], наложим на решение (6) следующее условие:

$$f(r,\ \theta,\ \varphi,\ u^2,\ u^0) = f(r,\ \theta,\ \varphi,\ u^2)\,\delta\left(u^0 - \sqrt{\frac{u^2+c^2}{g_{00}}}\right). \qquad (7)$$

Интегрируем (7) по u^0:

$$f(r,\ \theta,\ \varphi,\ u^2) = f_0\left(\frac{r-r_g}{r}\right)^{-\frac{mc^2}{2\theta}}\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{mc^2}{2\theta}} \times$$

$$\times\left(1+\frac{A\,\frac{\theta}{m}\,r^2\sin^2\theta\, u_\varphi^2}{e^2}\right)^{-\frac{mc^2}{\theta}}.$$

Если $c\to\infty$, то

$$\lim f(r,\ \theta,\ \varphi,\ u^2) = f_0 e^{-\frac{v}{\theta}}\, e^{-\frac{mu_r^2}{2\theta}} \exp\left\{-\left[\frac{m}{2\theta} + Ar^2\sin^2\theta\right] u_\varphi^2\right\}, \qquad (8)$$

где $v = m\varphi = -\frac{kmM}{r}$, $\frac{m}{2\theta} + Ar^2$ — вторая температура.

Второе решение уравнения (4) имеет вид

$$f = f_0 e^{-\frac{mu_r^2}{2\theta}}\, e^{-\frac{mu_\theta^2}{2\theta}}\, e^{-\frac{mu_\varphi^2}{2\theta}} \exp\left\{\frac{m(u^0)^2}{2\theta}\ \ \frac{r_g(r-r_g)}{r^2}\right\}.$$

Рассмотрим метрику, предложенную в работе [4]:

$$ds^2 = \left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^2 (dx^0)^2 - \frac{R^2(x^0)}{\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^2}\,(dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (9)$$

где k — постоянная пространственной кривизны, $R(x^0)$ будем считать медленно меняющейся функцией времени, причем

$$\text{при } x^0\to\infty \quad R' = \frac{\partial R}{\partial x^0}\to 0, \quad R\to R_0 = \text{const}.$$

Найдем сначала символы Кристоффеля для этой метрики, а затем подставим их в уравнение (1).

Пренебрегая бесконечно малыми членами, содержащими R', получаем в квазистационарном приближении следующее уравнение:

$$\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)u_r\,\frac{\partial f}{\partial r} + \left(1+\frac{kr^2}{4}\right)\frac{u_\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\theta} + \left(1+\frac{kr^2}{4}\right)\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\times$$

$$\times\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{1}{4}kru_r u_\theta\,\frac{\partial f}{\partial u_\theta} - \frac{u_r u_\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial u_\theta} + \frac{1}{4}kru_r u_\varphi\,\frac{\partial f}{\partial u_\varphi} -$$

$$-\frac{u_r u_\varphi}{r}\,\frac{\partial f}{\partial u_\varphi} + \left(1-\frac{kr^2}{4}\right)\frac{u_\theta^2}{r}\,\frac{\partial f}{\partial u_r} + \left(1-\frac{kr^2}{4}\right)\frac{u_\varphi^2}{r}\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial f}{\partial u_\theta} -$$

$$-\left(1-\frac{kr^2}{4}\right)\frac{u_\varphi^r}{r}\,\frac{\partial f}{\partial u_r} - \left(1-\frac{kr^2}{4}\right)\frac{u_\theta u_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial f}{\partial u_\varphi} -$$

$$-kru^0 u_r\,\frac{\partial f}{\partial u^0} - \frac{kr}{2}\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^2 (u^0)^2\,\frac{\partial f}{\partial u_r} = 0. \qquad (10)$$

Здесь

$$u_r = \frac{R}{1+\frac{kr^2}{4}}\dot{r}, \quad u_\theta = \frac{R}{1+\frac{kr^2}{4}}\dot{r\theta}, \quad u_\varphi = \frac{R}{1+\frac{kr^2}{4}} r \sin\theta\dot{\varphi}.$$

так называемые «физические составляющие» скорости.

Уравнение (10) имеет два решения. Степенное распределение частиц по скоростям:

$$f = f_0\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^{-\frac{mc^2}{\theta}}\left(1-\frac{u^2}{(u^0)^2\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^2}\right)^{\frac{mc^2}{2\theta}} \tag{11}$$

и экспоненциальное распределение частиц по скоростям:

$$f = f_0 e^{-\frac{mu_r^2}{2\theta}} e^{-\frac{mu_\theta^2}{2\theta}} e^{-\frac{mu_\varphi^2}{2\theta}} \exp\left\{\frac{m(u^0)^2}{2\theta}\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)\right\}.$$

После интегрирования степенного распределения (11) по u^0 и перехода к пределу $c\to\infty$ оно переходит в классическое экспоненциальное распределение частиц по скоростям.

Как известно из экспериментальных данных, для первичного космического излучения характерен степенной закон распределения частиц по скоростям. Пользуясь степенной функцией распределения (11), оценим относительное изменение числа частиц в некотором объеме V расширяющейся вселенной, например за 100 лет. Найдем сначала плотность числа частиц $\rho(r)$, интегрируя (11) по всем четырем компонентам вектора скорости u^α:

$$\rho(r) = f_0\pi\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{mc^2}{2\theta}-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{mc^2}{2\theta}\right)}\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^{-\frac{mc^2}{\theta}}.$$

Полное число частиц в объеме V равно

$$N = \int \rho(r)\sqrt{\gamma}\,dV = f_0\pi\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{mc^2}{2\theta}-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{mc^2}{2\theta}\right)}\times$$

$$\times R^3\iiint\limits_V \frac{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}{\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^{\frac{mc^2}{2\theta}+3}}, \tag{12}$$

где $\gamma = g_{11}g_{22}g_{33}$ — определитель пространственного метрического тензора. Чтобы оценить относительное изменение числа частиц за 100 лет, надо знать аналитическую зависимость функции R от времени, так как эта функция входит в формулу для N (12). В случае «пылевидной» материи $p=0$, $k=0$ с плотностью $\rho\neq 0$ [5] известно решение уравнений Эйнштейна:

$$R = \left(\frac{3A}{\lambda}\right)^{1/3} \operatorname{sh}^{2/3} \frac{\sqrt{3\lambda c^2}}{2}(t - t_0), \quad A = \mathrm{const}, \ \lambda = \mathrm{const}.$$

Относительное изменение числа частиц за 100 лет:

$$\frac{\frac{dN}{dt}}{N} \approx 4{,}9 \cdot 10^{-8}, \quad \Delta t = 100 \text{ лет}.$$

Итак, можно сделать следующие выводы.

Степенное распределение частиц по скоростям отсутствует в равномерно вращающейся системе отсчета. Экспоненциальное распределение существует и в этом случае.

В метрике Шварцшильда возможно обобщение степенного распределения на случай частного Оорта $\omega = 0, A \neq 0$.

Степенное и экспоненциальное распределение в квазистационарном приближении существуют и в неоднородной расширяющейся вселенной. Расширение пространственных масштабов приводит к увеличению со временем концентрации космических частиц в объеме. Однако это увеличение оказывается малым.

В заключение выражаю искреннюю благодарность проф. А. А. Власову за постановку задачи и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., «Наука», 1966.
2. Гордеев А. Н. «Астрономический журнал», 43, вып. 5, 1966.
3. Подосенов П. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 2, 1970.
4. Ващук В. И. Реферат кандид. диссертации. МГУ, 1970.
5. Мак-Витти Г. К. Общая теория относительности и космология. М., ИЛ, 1961.

Поступила в редакцию
17.6 1970 г.

Кафедра
теоретической физики