

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 3 — 1971

УДК 621.373

А. С. КОВАЛЕНКО, В. В. МИГУЛИН

## О МЕХАНИЗМЕ СИНХРОНИЗАЦИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ ТОМСОНОВСКИХ СИСТЕМ

Показано, что в томсоновских автоколебательных системах при внешнем гармоническом воздействии синхронный режим наступает в результате подавления автоколебаний. Указаны те крайние случаи соотношений параметров автоколебательной системы, когда возможно интегрирование укороченных уравнений. Расчет этих случаев подтверждает наличие подавления автоколебаний при наступлении синхронного режима.

1. Явление принудительной синхронизации колебаний электрических автоколебательных систем впервые наблюдалось экспериментально Винсентом [1] и Меллером [2] в двадцатых годах. Теоретическое рассмотрение этого явления было предпринято сначала Меллером, Эппльтоном [3], Ван дер-Полем [4] и затем Андроновым и Виттом, которые в 1930 г. опубликовали последовательную нелинейную теорию этого явления применительно к автоколебательным системам, близким к линейным консервативным, обычно называемым системами томсоновского типа [5].

Теория, развитая Андроновым и Виттом на основе метода медленно меняющихся амплитуд, послужила основой для многочисленных последующих работ. Особо следует отметить работу Рязина [6], проделавшего численное интегрирование укороченных уравнений при некоторых соотношениях параметров, что позволило изучить как процессы установления одночастотного режима, так и почти периодические движения в окрестности точно синхронного режима.

Результаты, полученные авторами этих работ, устанавливают количественные соотношения между шириной полосы синхронизации (так обычно называют область расстройек, в которой имеет место строго синхронный процесс), изменениями фазы и амплитуды синхронного процесса и параметрами системы и внешнего воздействия. Изучение области существования одночастотного режима проводилось путем анализа условий устойчивости решений с частотой воздействия. Границы области устойчивости подобного решения соответствуют границам полосы синхронизации. За их пределами точно периодический процесс теряет устойчивость и возникает сложный почти периодический процесс.

Применение метода вторичного укорочения, предложенного Р. В. Хохловым, позволило получить приближенное решение изучаемых укороченных уравнений для малых значений воздействующей периодической силы [7]. В рассматриваемом случае амплитуда «суммарного» коле-

бания мало отличается от амплитуды свободных автоколебаний, частота в режиме биений медленно и неравномерно меняется в окрестности частоты автоколебаний.

Введение дополнительных идеализаций (Есафов [8, 9] — ступенчатая нелинейная характеристика, Кобзарев [10, 11], Ван Слоотен [12] — импульсное периодическое воздействие) позволило рассмотреть ряд особенностей процесса установления синхронного режима.

Кроме этих важнейших работ теоретическому и экспериментальному изучению явления синхронизации посвящено очень большое число исследований, в которых либо методом меняющихся амплитуд, либо другими приближенными методами рассматриваются отдельные стороны этого явления.

Однако в известных нам работах отсутствует наглядное физическое описание самого механизма, обеспечивающего возникновение и поддержание синхронного процесса. Достаточно наглядное и физически очевидное объяснение принудительной синхронизации релаксационных колебаний в случае рассмотрения разрывных колебаний основано на воздействии внешней силы на величину каждого периода колебаний за счет определяющего влияния свойств нелинейного активного элемента на период автоколебаний. Это приводит к принудительному изменению частоты автоколебаний и «подтягиванию» ее вплоть до полного совпадения с частотой синхронизирующей силы. Однако по мере перехода от систем релаксационного типа к системам осцилляторным и, в пределе, при переходе к системам, близким к линейным консервативным — томсоновским системам, влияние свойств нелинейного активного элемента на частоту автоколебаний уменьшается вплоть до исчезающе малых поправок. По этой причине непосредственное влияние периодического внешнего воздействия на частоту автоколебаний (подобное известному процессу в релаксационных генераторах разрывных колебаний, приводящему к подтягиванию и принудительной синхронизации автоколебаний) должно уменьшаться по мере приближения системы к линейной консервативной.

Но эксперимент и расчеты показывают, что и для систем томсоновского типа существует явление возникновения колебательного процесса с частотой, точно совпадающей с частотой воздействия в достаточно широкой области расстроек. Это заставляет считать, что в подобных автоколебательных системах должен иметь место и другой механизм возникновения и поддержания синхронного процесса, связанный с усредненными свойствами этих систем.

Эти обстоятельства заставили нас вновь вернуться к этому, казалось бы, детально изученному вопросу и побудили авторов провести качественное рассмотрение явления принудительной синхронизации для систем, допускающих усреднение по периоду генерируемых колебаний, и предложить элементарное объяснение, согласующееся со всеми известными экспериментальными фактами.

2. Считая, что во всякой автоколебательной системе (АКС) осуществляется энергетический баланс, при малом изменении колебательной энергии системы за период автоколебаний по сравнению с общим ее запасом можно проводить усреднение потерь за период. Это эквивалентно допущению о квазиконсервативности АКС. Воздействие на подобную квазиконсервативную систему периодической силы с частотой, близкой к частоте свободных автоколебаний, должно приводить к возбуждению в ней вынужденных колебаний, подобно тому, как это имело бы место в резонансной системе с малым затуханием. Поскольку в обычной АКС с нелинейностью в активном параметре увеличение общей амплитуды колебаний по отношению к равновесной приводит к росту эффективного

затухания, при увеличении амплитуды «вынужденного» компонента суммарного колебания будет иметь место ухудшение условий поддержания автоколебательного процесса. Это приводит к снижению амплитуды автоколебаний вплоть до полного их подавления.

Таким образом, существование синхронного процесса для систем томсоновского типа внутри так называемой области синхронизации можно объяснить наличием в системе интенсивных вынужденных колебаний, при которых условия для поддержания автоколебательного процесса не выполняются — автоколебания подавлены. Границы области существования чисто вынужденного процесса определяются значениями расстройки, при которых амплитуда этого вынужденного процесса спадает настолько, что начинают выполняться условия поддержания автоколебаний. При этом чисто периодический процесс с частотой вынуждающей силы теряет устойчивость, и в системе возникает сложный колебательный процесс, не являющийся простой суперпозицией вынужденных и автоколебаний.

Одна из существенных особенностей процесса принудительной синхронизации — отсутствие «порога» в величине воздействующей силы для получения синхронного процесса, — для систем томсоновского типа объясняется тем, что автоколебательная система является квазиконсервативной. Наличие регенерации при этом существенно повышает добротность ее, и любая сколь угодно малая воздействующая сила при достаточной близости ее частоты к резонансной вызовет вынужденные колебания с амплитудой, необходимой для подавления автоколебаний и осуществления синхронного режима в некоторой конечной области расстроек.

Эти соображения естественно объясняют также тот факт, что ширина области синхронного режима при заданной неизменной величине воздействующей силы уменьшается с ростом амплитуды исходных автоколебаний. Тушение более интенсивных автоколебаний требует соответственно большей амплитуды вынужденных колебаний, которая может быть достигнута лишь для соответственно меньших расстроек частоты воздействия по отношению к частоте свободных автоколебаний.

Приведенные рассуждения непосредственно применимы лишь для АКС с мягким режимом возбуждения, для которых эффективное затухание представляет собой монотонную функцию амплитуды колебаний, имеющую отрицательное значение для малых амплитуд и изменяющую знак при возрастании амплитуды. Очевидно, в системах с жестким возбуждением автоколебаний, в которых затухание представляет собой не монотонную функцию интенсивности колебаний, процессы возникновения синхронного режима будут протекать сложнее. Но и в этом случае синхронный режим будет существовать тогда, когда автоколебания погашены и в системе установился чисто вынужденный процесс.

3. Для более детального рассмотрения механизма возникновения синхронного режима обратимся к анализу влияния параметров системы и воздействующей силы на течение процессов установления в ней синхронного режима.

При достаточно малой амплитуде внешнего воздействия поведение рассматриваемой системы, допускающей усреднение по периоду генерируемых колебаний, описывается укороченными уравнениями

$$\dot{A} = \theta(A) A + \lambda \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \xi - \frac{\lambda}{A} \sin \varphi. \quad (1)$$

Система (1) записана в безразмерном виде, усреднение проведено по периоду внешнего воздействия  $2\pi/\varphi$ . Малость внешней силы характе-

ризуется условием  $\lambda \ll 1$ , близость АКС к линейной консервативной — условием  $|\theta(A)|_{\max} \ll 1$ . Рассматриваем резонансное воздействие  $|\xi| \ll 1$ . При этом, прежде всего, будем интересоваться достаточно большими расстройками

$$|\xi| \sim \lambda, \quad |\xi| > \lambda. \quad (2)$$

Непосредственно после включения внешней силы амплитуда суммарного колебания меняется в окрестности равновесной, соответствующей для рассматриваемых систем условию энергетического баланса  $\theta(A_0) = 0$ . При любом отклонении  $\Delta A$  амплитуды суммарного колебания  $A \sin(\tau - \varphi)$  от равновесной в системе возникают некомпенсированные «потери», действие которых ограничивает отклонение.

а. Если эффективное затухание при отклонении амплитуды от стационарного значения растет (по модулю) быстро, и его значение для достаточно больших отклонений  $\Delta A$  велико по сравнению с частотой биений ( $|\theta(A_0 + \Delta A)| \gg |\xi|$ ), которой определяется максимальная скорость изменения фазового соотношения между компонентами суммарного колебания<sup>1</sup>, в системе устанавливается малое отклонение амплитуды  $a$ , соответствующее соотношению

$$|\theta(A_1)| = |\theta(A_0 + a)| \sim |\xi|, \quad \frac{a}{A_0} \ll 1. \quad (3)$$

Согласно (3), отклонение  $a$  устанавливается тем меньшим, чем резче меняется эффективное затухание в окрестности равновесной амплитуды. Установление малого отклонения  $a$  происходит значительно быстрее, чем может измениться фазовое соотношение между компонентами колебания. Пренебрегая малым временем  $\tau^* \sim \frac{1}{|\theta(A_0 + \Delta A)|}$  установления малого отклонения  $a$  по сравнению с периодом биений  $T_\Omega^* \sim \frac{1}{|\xi|}$ <sup>2</sup>,

можно сделать вывод, что эффективное затухание системы, определяемое амплитудой  $A_1$  суммарного колебания, меняется вместе с изменением фазовых соотношений между компонентами (при  $|\xi| > \lambda$  периодически с периодом биений  $T_\Omega$  — система обрабатывает биения).

Поскольку мы рассматриваем детерминированное воздействие на квазиконсервативную систему, быстрые амплитудные изменения, связанные с установлением «мгновенного» значения эффективного затухания системы соответственно (3), следует отнести главным образом к амплитудным изменениям собственного компонента колебания.

Сложный процесс в режиме биений определяется тем, что амплитуда «автоколебаний» периодически меняется от минимального значения при совпадении фаз вынужденного и собственного компонентов до максимального в противофазном состоянии; одновременно скорость изменения

<sup>1</sup> Фазовым соотношением между компонентами определяется в каждый момент времени максимально возможное отклонение  $\Delta A$  амплитуды суммарного колебания от равновесной (в рассматриваемом случае не может быть реализовано, если оно велико, вследствие быстрого роста потерь).

<sup>2</sup>  $T_\Omega^*$  — минимальный период биений; в режиме биений  $\left( \xi = \frac{\rho^2 - \omega_0^2}{2\rho^2} \approx \frac{\rho - \omega_0}{\rho} > \lambda \right)$  возможно увеличение периода  $T_\Omega$  за счет некоторого изменения частоты автоколебаний, что не противоречит изложенному представлению о синхронном режиме как о вынужденных колебаниях в регенерированной системе.

фазы автоколебаний меняется. Это происходит в результате жесткого<sup>1</sup> ограничения отклонений амплитуды суммарного колебания от равновесной.

В результате частота суммарного колебания медленно и неравномерно движется в окрестности частоты свободных автоколебаний при практически неизменной суммарной амплитуде (рис. 1). Точки на окружности  $A_1, A_2, A_3 \dots$  соответствуют положению вектора суммарного колебания через равные промежутки времени  $\Delta t$ . В любой момент времени вектор суммарного колебания равен векторной сумме вынужденного и собственного компонентов ( $\overline{OA_1} = \overline{OM} + \overline{MA_1}$ ). По истечении времени  $\Delta t$  собственный вектор  $\overline{MA}$  при отсутствии амплитудного ограничения повернулся бы на угол  $\angle A_1MB = \xi \Delta t$ ; вследствие жесткого ограничения амплитудных отклонений положение собственного вектора по истечении

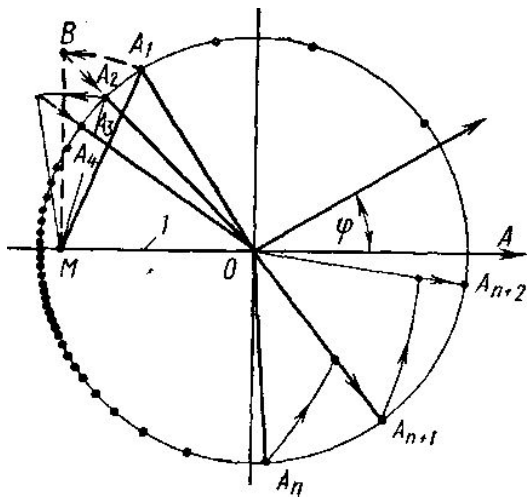


Рис. 1. «Жесткое» ограничение амплитудных отклонений. Режим биений

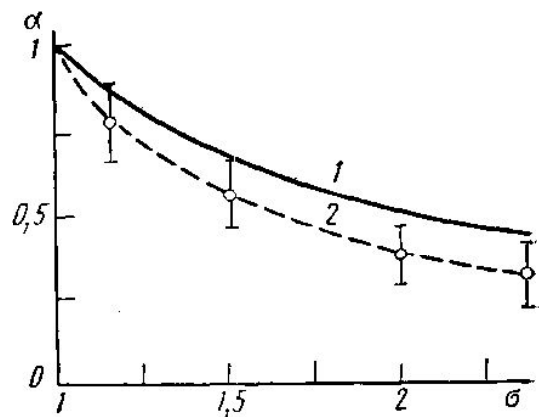


Рис. 2. «Консервативное» приближение для амплитуды вынужденного компонента колебаний при жестком ограничении амплитудных отклонений

$$\alpha = \frac{A_{\text{вын}}}{A_0}; \quad \sigma = \frac{|\xi|}{\xi_0}; \quad \xi_0 = \frac{\lambda}{A_0}$$

времени  $\Delta t$  изображается  $\overline{MA_2}$  и т. д., т. е. при приближении к синфазному состоянию амплитуда автоколебаний уменьшается, изменение фазовых соотношений между компонентами замедляется (и далее в соответствии с рис. 1).

Поскольку при приближении к синфазному состоянию скорость изменения фазы замедляется, при практически постоянном фазовом соотношении устанавливается значительно меньшее отклонение  $a$  амплитуды суммарного колебания, такое, что

$$|\theta(A_0 + a)| \sim \frac{\Omega}{p} \ll |\xi|. \quad (4)$$

Вывод, сделанный при анализе соотношения (3), означает, что в рассматриваемом случае система воспринимает сложный нестационарный процесс (процесс биений) как одно колебание с медленно меняющимися амплитудой и фазой, что позволяет рассчитать реакцию системы на внешнее воздействие не только внутри области синхронного режима, но и в режиме биений

<sup>1</sup> Говоря о жестком ограничении амплитуды отклонений, мы имеем в виду, что в рассматриваемом случае быстро (во времени  $\tau$ ) устанавливаются малые отклонения  $a$  при практически постоянных фазовых соотношениях между компонентами.

$$A_{\text{вын}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\xi^2 + \theta^2(A)}}. \quad (5)$$

При выполнении более сильного ограничения [4]:

$$A_{\text{вын}} \simeq \frac{\lambda}{|\xi|}, \quad (6)$$

т. е. в рассматриваемом случае в области биений вблизи полосы синхронизации, мы можем рассчитать амплитуду вынужденного компонента колебания, пользуясь «консервативным» приближением (6). Справедливость этого вывода подтверждается рис. 2. Кривая 1 на этом рисунке есть «консервативное» приближение для амплитуды вынужденного компонента колебаний (см. (6)), кривая 2 — экспериментальная; сравнение проведено для расстроек, соответствующих режиму биений  $\sigma = \frac{|\xi|}{\xi_0} \geq 1$ ,  $\xi_0 = \frac{\lambda}{A_0}$  соответствует границе области синхронного режима.

С другой стороны, выводы, сделанные при анализе соотношения (3), позволяют судить об условиях возникновения строго синхронного режима в рассматриваемом случае. Установление синхронного режима, связанное с полным подавлением автоколебаний, произойдет когда

$$\theta(A) > 0, \quad \theta(A_{\text{вын}}) \geq 0, \quad (7)$$

т. е. когда амплитуда вынужденного компонента будет больше равновесной:

$$A_{\text{вын}} \geq A_0. \quad (8)$$

Из (6) и (8) следует известное для систем рассматриваемого вида выражение для ширины полосы синхронизации:

$$\xi_0 = \frac{\lambda}{A_0}. \quad (9)$$

Внутри полосы синхронного режима ограничение амплитуды вынужденных колебаний (5) происходит аналогично тому, как и в потенциально автоколебательных системах. Существование устойчивого синхронного режима определяется постоянным вложением энергии со стороны внешнего источника. Амплитуда вынужденного режима мало отличается от равновесной (но больше нее, что существенно (8)), это результат быстрого роста потерь с увеличением амплитуды. Если уменьшить скорость нарастания потерь (изменив форму кривой  $\theta(A)$  в окрестности равновесной амплитуды  $A_0$ ), при прежней расстройке установится большая амплитуда. Однако в любом случае существенным для процесса установления синхронного режима является наличие некомпенсированных внутренним источником потерь, в результате чего условия поддержания автоколебаний нарушены, т. е. происходит тушение автоколебаний.

б. Если эффективное затухание  $\theta(A)$  для действующих отклонений амплитуды  $\Delta A$  остается малым (по-прежнему рассматриваем не слишком малые расстройки (2)), т. е. если

$$|\theta(A_0 + \Delta A)| \ll |\xi|, \quad (10)$$

то процессы установления в системе протекают медленно. Быстрые осцилляции амплитуды в системе (с частотой биений) в этом случае усредняются по периоду биений. Форма огибающей биений близка к синусоидальной. Система «разделяет» колебания. На этом основании мы

можем провести дополнительное усреднение укороченных уравнений по периоду биений.

Не останавливаясь на строгом доказательстве метода построения приближенного решения системы (1), приведем уравнения, описывающие в рассматриваемом случае в нулевом улучшенном приближении поведение вынужденного и собственного компонентов колебаний

$$\begin{aligned}\ddot{A} &= \theta_1(\tilde{A}, \gamma) \tilde{A} + \lambda \cos \tilde{\varphi}, \quad \ddot{\varphi} = \xi - \frac{\lambda}{\tilde{A}} \sin \tilde{\varphi}, \\ \dot{\gamma} &= \theta_2(\tilde{A}, \gamma) \gamma, \quad \dot{\psi} = 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь  $\tilde{A} \sin(\tau - \tilde{\varphi})$  — вынужденный компонент суммарного колебания  $A \sin(\tau - \varphi)$ ;  $\gamma \sin[(1 - \xi)\tau + \psi]$  — собственный компонент. В частном случае, когда  $\theta(A) = \theta_0 + \frac{1}{4} \theta_2 A^2$ :

$$\begin{aligned}\theta_1(\tilde{A}, \gamma) &= \theta_0 + \frac{1}{4} \theta_2 (\tilde{A}^2 + 2\gamma^2), \\ \theta_2(\tilde{A}, \gamma) &= \theta_0 + \frac{1}{4} \theta_2 (\gamma^2 + 2\tilde{A}^2).\end{aligned}\quad (12)$$

В отличие от предыдущего случая (раздел 3,а) затухание в системе по отношению к собственному и вынужденному компонентам суммарного колебания различно.

Синхронный режим в рассматриваемом случае возникает при условии подавления автоколебаний: когда

$$\theta_2(A, \gamma) < 0, \quad \theta_2(A, 0) \leq 0.\quad (13)$$

Из (12) и (13) видим, что в этом случае устойчивый синхронный режим в системе, описываемой укороченными уравнениями (1), может наступить при амплитудах (на границе полосы), меньших амплитуды свободных автоколебаний, и фазах, лежащих вне пределов  $[0, \pi]$ .

Внутри полосы синхронного режима аналогично случаю, рассмотренному в предыдущем разделе, стационарные колебания представляют собой вынужденные колебания в сильно регенерированной системе. На границе полосы синхронизации (при фазах вне пределов  $[0, \pi]$ ) источник внешнего воздействия отбирает энергию из системы. Однако общий вывод о природе синхронного режима остается справедливым — синхронный режим наступает в результате подавления автоколебаний, условиями которого, в отличие от предыдущего случая, являются (13).

Реальные системы, процессы в которых при малых периодических воздействиях описываются укороченными уравнениями (1), с большей или меньшей степенью точности могут быть отнесены к одному из двух рассмотренных крайних случаев.

С увеличением амплитуды действующей силы мы приходим к таким ее значениям, когда укороченные уравнения в форме (1) не справедливы. Случай больших сил тесно примыкает к описанному в разделе 3,б. Рассматривая не слишком малые расстройки (порядка  $\lambda \sim 1$ ) и усредняя по периоду биений исходное дифференциальное уравнение  $\ddot{x} + x = \xi x + \theta(x)x + \lambda \cos t$ , получаем условия асинхронного подавления автоколебаний, хорошо изученного в литературе [11].

Следовательно, в системах томсоновского типа при любой амплитуде действующей силы одночастотный синхронный режим наступает в результате подавления автоколебаний.

4. Исследование режимов установления для различного вида зависимости эффективного затухания от амплитуды было проведено на модулирующей установке МН-7 с использованием нелинейных блоков НБН-1. Схема строилась на основании укороченных уравнений в декартовых координатах  $a$  и  $b$ . Процессы установления фотографировались с экрана осциллографа. Решение проведено для малых ( $\lambda \ll 1$ ) различной величины внешних сил при различных расстройках.  $\theta(A)$  задавалось таким образом, чтобы  $|\theta(A)|_{\max}$  и  $A_0$  оставались неизменными при переходе от одного вида к другому, различие между которыми заключалось

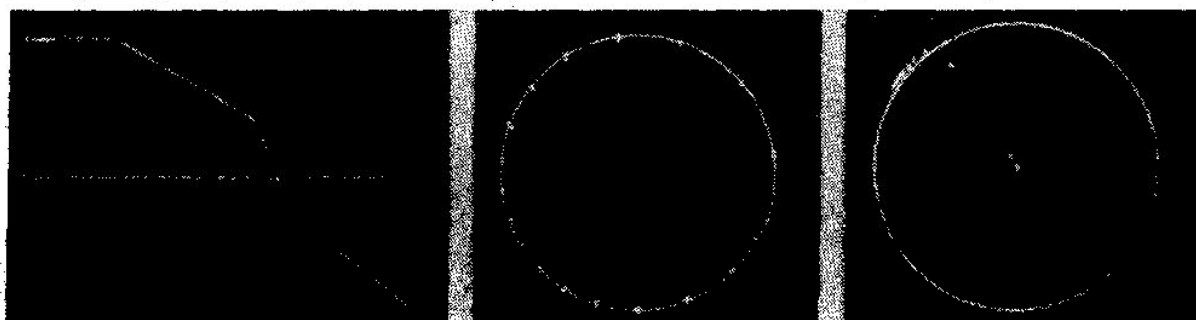


Рис. 3.  $a$  — зависимость эффективного затухания от амплитуды  $\theta_1(A)$ ,  $b$  — режим биений,  $c$  — установление строго синхронного режима

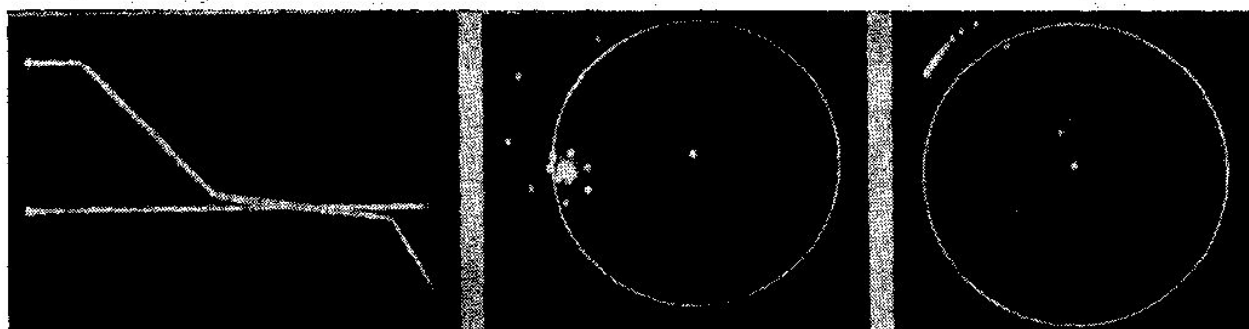


Рис. 4.  $a$  — зависимость  $\theta_2(A)$ ,  $b$  — установление строго синхронного режима при достаточно больших расстройках,  $c$  — установление синхронного режима при малых расстройках

в скорости изменения  $\theta(A)$  в окрестности малых отклонений амплитуды от равновесной  $A_0$  и форме изменения в этой окрестности.

Основные результаты приведены на рис. 3 и 4. На этих рисунках радиус окружности равен амплитуде свободных автоколебаний  $A_0$ . Точками обозначено мгновенное положение вектора суммарного колебания через равные промежутки времени  $\Delta t$ . Рис. 3 соответствует случаю, рассмотренному в разделе 3,а, рис. 4 — случаю, рассмотренному в разделе 3,б.

Проведенное исследование полностью подтверждает качественные выводы, приведенные выше.

В заключение сделаем некоторые выводы.

Установление синхронного режима в системах, близких к линейным консервативным, т. е. системах, допускающих усреднение амплитуд (энергии) по периоду генерируемых колебаний, происходит в результате подавления автоколебаний.



Характерные особенности процесса установления синхронного режима при малых внешних воздействиях определяются поведением конкретной системы (томсоновского типа) при действующих отклонениях амплитуды колебания от равновесной.

Если для действующих отклонений потери в системе малы (условия раздела 3б), система усредняет биения. Эффективное затухание в системе определяется абсолютными значениями амплитуд вынужденного и собственного компонентов суммарного колебания и имеет различные значения для колебаний на частоте воздействия и собственной (когда расстройки не слишком малы (2)).

Если потери в системе растут быстро — эффективное затухание меняется резко в окрестности амплитуды свободных автоколебаний, — и для действующих отклонений велики (раздел 3,а), система отрабатывает биения. Эффективное затухание в каждый момент времени определяется текущим значением суммарной амплитуды, которое зависит как от абсолютных значений амплитуд спектральных компонентов колебания, так и от разности фаз между ними; время установления синхронного режима определяется временем установления критического фазового соотношения. В режиме биений эффективное затухание меняется вместе с амплитудой суммарного колебания, следовательно, вместе с изменением разности фаз меняется и амплитуда собственного компонента от минимальной при совпадении фаз до максимальной при разности фаз, равной  $\pi$ , так что амплитуда суммарного колебания остается всегда в окрестности  $A_0$ . Скорость изменения фазы определяется расстройкой плюс подталкивание как следствие жесткого ограничения отклонений амплитуды суммарного колебания. С увеличением (при малых отклонениях амплитуды) скорости нарастания потерь, т. е. с увеличением  $\left| \frac{dD}{dA} \right|_{A_0} A_0$ , которая для исчезающе малых отклонений характеризует жесткость предельного цикла автоколебаний, роль подталкивания фазы увеличивается.

Переход от систем томсоновского типа к релаксационным обычно сопровождается увеличением «потерь» при малых отклонениях амплитуды от равновесной, ростом жесткости предельного цикла. Время установления вынужденного режима все в большей степени определяется временем установления критического фазового соотношения.

Однако до тех пор, пока сохраняет смысл понятие средней крутизны нелинейной характеристики, средней энергии за период колебания, т. е. пока мал энергообмен и средние энергетические соотношения играют основную роль, систему можно считать квазиконсервативной, установление синхронного режима происходит в результате подавления автоколебаний.

С переходом к генераторам релаксационного типа, когда принцип усреднения не применим, поскольку система далека от консервативной, роль фазовых соотношений доминирует; одновременно вынужденный компонент колебаний при малом воздействии мал для любых расстроек; синхронный режим наступает в результате захвата частоты автоколебаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Vincent J. H. Proc. Phys. Soc., **32**, 2, 84, 1920.
2. Möller H. G. Jahr. f. draht. Tel., **17**, 256, 1921.
3. Appleton E. V. Proc. Cambr. Soc., **21**, 3, 231, 1923.
4. Van der Pol. Phil. Mag. Sos., **7**, 3, 65, 1927.

5. Андронов А. А., Витт А. А. ЖТФ, 7, 4, 3, 1930.
6. Рязин П. А. ЖТФ, 5, 1, 38, 1935.
7. Хохлов Р. В. ДАН, 97, № 3, 411, 1954.
8. Есафов Н. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 5, 131, 1947.
9. Есафов Н. И. Реферат кандид. диссертации. МГУ, 1946.
10. Кобзарев Ю. Б. Techn. Phys. of the USSR, 2, 1, 1935.
11. Кобзарев Ю. Б. «Вестник НИИ», 4, 1959.
12. Van Slooten J. Elect. Appl. Bull., 12, 617, 1951.
13. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. ЖТФ, 4, 1, 98, 1934.

Поступила в редакцию  
23.7 1970 г.

Кафедра  
физики колебаний