ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1971

В. А. БАРЫНИН

# ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ХРОНОМЕТРИЧЕСКИ-ИНВАРИАНТНОМ ДВУХМЕТРИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ

В рамках трехмерного хронометрически-инвариантного двухметрического формализма рассматриваются условия существования интегральных законов сохранения. Обсуждается вопрос о разумном с физической точки зрения построении дифференциальных законов сохранения энергии и импульса и приводится вид соответствующих интегральных законов сохранения для произвольного объема пространства. Описывается способ однозначного в рамках трехмерного хронометрически-инвариантного формализма построения выражений для плотностей энергии и импульса всей материи и их потоков.

Формулировка законов сохранения в общей теории относительности встречается, как известно, с рядом трудностей, связанных с нетензорностью символов Кристоффеля и сводящихся к тому, что сохраняющиеся величины оказываются зависимыми не только от выбора системы отсчета, но и от таких преобразований координат и времени, которые ее не изменяют и не имеют, следовательно, никакого физического содержания.

Эти трудности могут быть разрешены в рамках двухметрического формализма [1, 2, 3 и др.]. При этом, однако, из рассмотрения автоматически исключаются все явления инерции, так как все величины становятся инвариантными относительно общих преобразований координат и времени, включающих в себя и переход к другой системе отсчета.

Указанных недостатков лишен предложенный в [4, 5] трехмерный хронометрически инвариантный (х и) двухметрический формализм.

Обобщением существующих в общей теории относительности дифференциальных законов сохранения вида

$$\frac{\partial U_\alpha^\beta}{\partial x^\beta}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial U^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}=0 \tag{1}$$

в рассматриваемом формализме являются соотношения

$$D_\lambda \overset{*}{U}{}_\mu^\lambda=0 \quad \text{или} \quad D_\lambda \overset{*}{U}{}^{\lambda\mu}=0 \tag{2а}$$

в $D$-модификации [4] и

$$\nabla_\lambda \overset{*}{U}{}_\mu^\lambda=0 \text{ или } \nabla_\lambda \overset{*}{U}{}^{\lambda\mu}=0 \tag{2б}$$

в $\nabla$-модификации [5], где $\overset{*}{U}{}^0_0$, $\overset{*}{U}{}^{00}$ — трехмерные х и скаляры, $\overset{*}{U}{}^0_m$, $\overset{*}{U}{}^{0m}$, $\overset{*}{U}{}^l_0$, $\overset{*}{U}{}^{l0}$ — векторы, а $\overset{*}{U}{}^{lm}$ и $\overset{*}{U}{}^l_m$ — тензоры. (Здесь и далее греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, а латинские — 1, 2, 3.)

Выясним, при каких ограничениях на временную $\tau_\alpha$ и пространственную $\varepsilon_{ik}$ метрики системы отсчета из дифференциальных соотношений (2) будут следовать соответствующие интегральные законы сохранения.

Рассмотрим прежде всего операцию интегрирования некоторой функции координат и времени по пространственным координатам. По смыслу трехмерного х и двухметрического формализма это интегрирование должно во всех точках производиться в один и тот же момент инвариантного времени $T$, а следовательно, возможно лишь в том случае, если временная метрика допускает единую синхронизацию времени во всей области интегрирования. Это возможно, если выражение

$$dT = \tau_\alpha\, dx^\alpha$$

является полным дифференциалом, что эквивалентно рассмотренному в работе [4] условию

$$S^\lambda_{\mu\nu} = 0. \qquad (3)$$

Для краткости будем рассматривать лишь одно дифференциальное соотношение — (2а), так как полученный результат для всех будет одинаковым. Для $\mu=0$ при выполнении условия (3) оно может быть приведено к виду

$$\frac{\partial^* \overset{*}{U}{}^{00}}{\partial t} + \nabla_l\, \overset{*}{U}{}^{l0} + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^* \varepsilon_{lm}}{\partial t}\, (\overset{*}{U}{}^{00} \varepsilon^{lm} + \overset{*}{U}{}^{lm}) = 0,$$

где $\nabla_l$ — трехмерная х и $\varepsilon$-производная [5]. Проинтегрируем его по произвольному трехмерному объему $v$, понимаемому как гиперповерхность в четырехмерном пространстве, определяемая уравнением $T=\mathrm{const}$. Запишем элемент объема $dv = \sqrt{\varepsilon}\, dx^1 dx^2 dx^3$ и, принимая во внимание, что при выполнении условия (3) операцию х и дифференцирования по времени можно вынести из-под знака интеграла, получим, применив ко второму интегралу теорему Гаусса,

$$\frac{\partial^*}{\partial t} \int\limits_v \overset{*}{U}{}^{00}\, dv + \oint\limits_\Sigma n_l \overset{*}{U}{}^{l0} = \frac{1}{2} \int\limits_v \frac{\partial^* \varepsilon_{lm}}{\partial t}\, \overset{*}{U}{}^{lm}\, dv, \qquad (4)$$

где второй интеграл берется по замкнутой поверхности $\Sigma$, охватывающей объем $v$, а $n_e$ — компонент х и вектора нормали к этой поверхности.

Выражение (4) будет иметь смысл интегрального закона сохранения, если его правая часть обратится в нуль, т. е. при выполнении условия

$$\frac{\partial^* \varepsilon_{em}}{\partial t} = 0. \qquad (5)$$

Исходное выражение для $\mu=m$ при выполнении условий (3) и (5) принимает вид

$$\frac{\partial^* \overset{*}{U}{}^{0m}}{\partial t} + \nabla_e\, \overset{*}{U}{}^{em} = 0.$$

Проинтегрируем его по тому же объему, домножив предварительно на некоторый произвольный х и трехмерный вектор $\xi_m$, зависящий, вообще говоря, от координат и времени. После простых вычислений с учетом условий (3) и (5), получим

$$\frac{\partial^*}{\partial t}\int\limits_v \overset{*}{U}{}^{0m}\xi_m\,dv + \oint\limits_\Sigma n_e \overset{*}{U}{}^{em}\xi_m\,ds = \int\limits_v\left(\overset{*}{U}{}^{0m}\frac{\partial^*\xi_m}{\partial t} + \overset{*}{U}{}^{em}\nabla_e\xi_m\right)dv. \qquad (6)$$

Это выражение также будет интегральным законом сохранения при обращении в нуль правой части, т. е. при

$$\frac{\partial^*\xi_m}{\partial t} = 0, \quad \nabla_e\xi_m = 0.$$

В то время, как первое условие можно выполнить всегда, удовлетворение второго требует дополнительного ограничения на пространственную метрику. Действительно, оно требует, чтобы во всей области интегрирования можно было построить поле параллельного х и вектора $\xi$, что возможно лишь в том случае, если х и трехмерный тензор кривизны

$$q^i_{klm} = 0. \qquad (7)$$

Если величины $\overset{*}{U}{}^{me}$ симметричны по индексам, то второе из указанных условий может быть заменено более слабым

$$\nabla_l\xi_m + \Delta_m\xi_l = 0,$$

имеющим вид уравнений Киллинга и приводящим к требованию не нулевой, а лишь постоянной кривизны пространственной метрики.

Таким образом, в общем случае для существования законов сохранения в рамках трехмерного х и двухметрического формализма временная и пространственная метрики системы отсчета должны удовлетворять условиям (3), (5) и (7).

Построение конкретных выражений для соответствующих плотностей $\overset{*}{U}{}^{\lambda\mu}$ (или $\overset{*}{U}{}^{\lambda}_{\mu}$) в законах сохранения при выполнении условий (3), (5) и (7) не вызывает никаких затруднений. Действительно, их можно получить обобщением любой из известных модификаций плотности комплекса энергии — импульса $U^{\alpha\beta}$ (или $U^{\alpha}_{\beta}$), удовлетворяющего уравнению (1). Указанное обобщение заключается в замене всех входящих в выражение для $U^{\alpha\beta}$ (или $U^{\beta}_{\alpha}$) потенциалов и их частных производных на соответствующие х и $E$ или $\varepsilon$-ковариантные аналоги, а определителя метрического тензора $g$ на четырехмерный скаляр $\overset{*}{g}/\varepsilon$, где $\overset{*}{g} = Det\,\overset{*}{g}_{\mu\nu}$.

В том, что полученные таким способом величины $\overset{*}{U}{}^{\lambda\mu}$ (или $\overset{*}{U}{}^{\lambda}_{\mu}$) будут удовлетворять соотношениям (2), легко убедиться, заметив, что в декартовой системе пространственных координат и при $\tau_0 = 1$ и $\tau_k = 0$ (приведение пространственной и временной метрик к такому виду возможно в силу условий (3), (5) и (7)) соотношения (1) и (2) совпадают.

Таким образом, мы получаем целый набор математически равноправных законов сохранения. Для устранения такой неоднозначности из физических соображений сравним законы преобразования компонент $\overset{*}{U}{}^{00}$ и $\overset{*}{U}{}^{0}_{0}$, а также $\overset{*}{U}{}^{0m}$ и $\overset{*}{U}{}^{0}_{m}$ при переходе к другой системе отсчета, движущейся, по отношению к исходной как целое $\left(\text{в том смысле, что и в этой системе отсчета } \frac{\partial^* \varepsilon_{ik}}{\partial t} = 0\right)$ с постоянной скоростью $\bar{v}_0$ $\left(\text{т. е. } \frac{\partial^* v_0^l}{\partial t} = 0 \text{ и } \nabla_m v_0^l = 0\right)$. В декартовых координатах при $\tau_0 = 1$ и $\tau_k = 0$ это преобразование записывается в виде

$$x'^l = x^l + v_0^l \cdot t$$

и приводит в силу тензорности $U_\alpha^\beta$ и $U^{\alpha\beta}$ относительно линейных преобразований координат к следующим соотношениям:

$$\overset{*}{U}'^{00} = \overset{*}{U}^{00}; \quad \overset{*}{U}'^{0m} = \overset{*}{U}^{0m} + U_0^l \overset{*}{U}^{00};$$

$$\overset{*}{U}'^0_0 = \overset{*}{U}^0_0 + v_0^l \ U_e^0; \quad \overset{*}{U}'^0_m = \overset{*}{U}^0_m.$$

Инвариантность компонентов $\overset{*}{U}{}^0_m$ относительно этих преобразований не позволяет, по-видимому, интерпретировать их как компоненты плотности импульса. Поэтому для описания энергии и импульса всей материи можно пользоваться лишь величинами вида $\overset{*}{U}{}^{\lambda\mu}$, разумно преобразующимися при этих преобразованиях, и интерпретировать $\overset{*}{U}{}^{00}$ и $\overset{*}{U}{}^{0m}$ как плотность энергии и импульса всей материи, а $\overset{*}{U}{}^{l0}$ и $\overset{*}{U}{}^{lm}$ — как плотность их потоков.

Таким образом, в том случае, когда выполняются условия (3), (5) и (7), дифференциальные законы сохранения в трехмерной форме имеют вид

$$\frac{\partial^* \overset{*}{U}{}^{00}}{\partial t} + \nabla_l \overset{*}{U}{}^{l0} = 0,$$

$$\frac{\partial^* \overset{*}{U}{}^{0m}}{\partial t} + \nabla_l \overset{*}{U}{}^{lm} = 0,$$

а интегральные, следующие из (4) и (6) в трехмерной векторной записи:

$$\frac{\partial^* E_v}{\partial t} + \Phi_\Sigma = 0.$$

$$\frac{\partial^* \bar{P}_v}{\partial t} + \bar{\Psi}_\Sigma = 0. \tag{8}$$

Величина

$$E_v = \int_v \overset{*}{U}{}^{00}\, dv, \tag{9}$$

имеющая смысл энергии всей материи, заключенной в объеме $v$, является трехмерным х и скаляром, а величина $\bar{P}_v$, имеющая смысл импульса в том же объеме, является свободным трехмерным х и вектором, декартовы координаты которого определяются выражением

$$P_v^a = \int_v e_m^{(a)} \overset{*}{U}{}^{0m}\, dv, \tag{10}$$

где $e_m^{(a)}$ — $m$-ная ковариантная координата $a$-го реперного вектора декартовой системы координат. Х и скаляр $\Phi_\Sigma$ и свободный вектор $\overline{\Psi}_\Sigma$ имеют соответственно смысл интегральных потоков энергии и импульса через поверхность $\Sigma$, охватывающую объем $v$, и определяются выражениями:

$$\Phi_\Xi = \oint_\Sigma n_l \overset{*}{U}{}^{l0}\, ds,$$

$$\Psi_\Sigma^a = \oint_\Sigma n_l e_m^{(a)} \overset{*}{U}{}^{lm}\, ds.$$

Если величина $\overset{*}{U}{}^{\lambda\mu}$ симметрична по индексам, существуют, как известно, и законы сохранения импульса и движения центра масс:

$$\Delta_\lambda (r^\mu \overset{*}{U}{}^{\lambda\nu} - r^\nu \overset{*}{U}{}^{\lambda\mu}) = 0,$$

где через $r^m$ обозначены компоненты радиуса-вектора, проведенного из заданной точки в произвольную, а $r^0$ просто инвариантное время $T$, причем, очевидно, что $\nabla_\lambda r^\mu = \delta_\lambda^\mu$. Учитывая условия (3), (5) и (7) и интегрируя их по некоторому трехмерному объему $v$, получаем интегральные законы сохранения, которые в трехмерной записи имеют вид

$$\frac{\partial^*}{\partial t} (E_v R_v^a - T P_v^a) + \Lambda_\Sigma^a = 0,$$

$$\frac{\partial^*}{\partial t} M_v^{ab} + \Omega_\Sigma^{ab} = 0,$$

где $E_v$ и $P_v^a$ определены соотношениями (9) и (10),

$$\Lambda_\Sigma^a = \oint_\Sigma n_l (r^m \overset{*}{U}{}^{l0} - T \overset{*}{U}{}^{lm})\, e_m^{(a)}\, ds,$$

$$R_v^a = \frac{1}{E_v} \int_v r^m e_m^{(a)} \overset{*}{U}{}^{00}\, dv$$

декартовы координаты центра масс, заключенной в данном объеме материи, а

$$M_v^{ab} = \int_v (r^m \overset{*}{U}{}^{0n} - r^n \overset{*}{U}{}^{0m})\, e_m^{(a)} e_n^{(b)}\, dv$$

и

$$\Omega_v^{ab} = \oint_\Sigma n_l (r^m \overset{*}{U}{}^{ln} - r^n \overset{*}{U}{}^{lm})\, e_m^{(a)} e_n^{(b)}\, dS$$

декартовы компоненты свободных тензоров момента импульса этой материи и потока момента импульса через поверхность $\Sigma$.

Существенной особенностью рассмотренных интегральных законов сохранения является то, что входящие в них величины относятся к произвольному объему пространства и инвариантны относительно любых преобразований координат и времени, не меняющих систему отсчета, не ограничивая в то же время характер зависимости этих величин от ее выбора, связанной со свойствами конкретного выражения для $\overset{*}{U}{}^{\lambda\mu}$.

3. Единственной модификацией комплекса энергии-импульса, имеющей вид $U^{\alpha\beta}$, является выражение Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [6], которое к тому же симметрично по индексам и позволяет сформулировать законы сохранения момента импульса и движения центра масс. Таким образом, выражение для $\overset{*}{U}{}^{\mu\lambda}$, строящееся из него по описанному выше правилу, определяется однозначно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rosen N. Phys. Rev., 57, 147, 1940.
2. Сбытов Ю. Г. «Изв. вузов», физика, № 4, 48, 1963.
3. Мицкевич Н. В. «Труды ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы», 11, физика, вып. 1, 58, 1965.
4. Барынин В. А. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 6, 1969.
5. Барынин В. А. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 2, 1970.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1967.

Поступила в редакцию
12.6 1970 г.

Кафедра
теоретической физики