жительных z, что приводит к уменьшению наклона траектории среднего пучка по сравнению с наклоном траектории невозмущенного пучка.

В заключение заметим, что при отражении квазимонохроматического импульса от регулярно-неоднородной среды с флуктуациями диэлектрической проницаемости среднее время группового запаздывания также будет отличаться от времени группового запаздывания импульса при отражении его от регулярно-неоднородной среды. Оба указанных эффекта могут иметь существенное значение при использовании радиоволн для различных специальных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. «Успехи физических наук», № 4, 1953.
2. Гусев В. Д., Приходько Л. И. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 2, 1970.

Поступила в редакцию
9.9 1970 г.

Кафедра
волновых процессов

УДК 539.12.01

А. Д. СМИРНОВ

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

В современной теории поля и элементарных частиц обычно используется аппарат линейных представлений групп симметрии. Взаимодействие же полей приводит по существу к нелинейным уравнениям поля. Переход к более широкой группе симметрии требует, как правило, введения дополнительных полей.

В данной работе на примере группы $SU(2)\otimes SU(2)$ показывается возможность расширения группы симметрии без введения дополнительных полей, используя аппарат нелинейных представлений групп. Найдено соответствующее $SU(2)\otimes SU(2)$ — инвариантное нелинейное спинорное уравнение.

Общие свойства нелинейных представлений рассматривались в [1], где, в частности, дано определение нелинейного представления r-параметрической группы G как гомоморфизма в группу преобразований координат u_a N-мерного пространства:

$$u_a \to \widetilde{u}_a = u_a + \delta t_\mu M_a^{(\mu)}(u), \qquad a = 1, 2, \ldots, N, \quad \mu = 1, 2, \ldots, r.$$

где $M_a^{(\mu)}(u)$ — генераторные функции, удовлетворяющие уравнению

$$M_b^{(\mu)} \frac{\partial M_a^{\nu}}{\partial u_b} - M_b^{(\nu)} \frac{\partial M_a^{(\mu)}}{\partial u_b} = C_\rho^{\mu\nu} M_a^{(\rho)}, \tag{1}$$

где $C_\rho^{\mu\nu}$ — структурные константы группы G.

Построим нелинейное представление группы $SU(2)\otimes SU(2)$ на двух спинорных полях Ψ_a: $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$, где Ψ_1, Ψ_2 — дираковские биспиноры.

Введем преобразования

$$\Psi \to \widetilde{\Psi} = \Psi + \delta t_\mu M^{(\mu)}(f)\Psi \qquad \overset{*}{\psi} \to \widetilde{\overset{*}{\psi}} = \overset{*}{\psi} + \delta t_\mu M_*^{\mu}(f)\overset{*}{\psi}, \tag{2}$$

где $f_\rho = (\overline{\Psi}\tau^{(\rho)}\Psi)$, $\tau^{(0)} = I$, $\tau^{(i)}$ — матрицы Паули, $i = 1, 2, 3$; $M^{(\mu)}(f)$ — 2×2 матрицы, действующие на «изотопический» индекс a:

$$M^{(\mu)} = \{T^{(i)}, X^{(j)}\} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В случае группы $SU(2)\otimes SU(2)$ уравнения (1) для преобразования (2) имеют вид

$$\sum_\rho \left(R_{T\rho}^{(i)} \frac{\partial T^{(j)}}{\partial f_\rho} - R_{T\rho}^{(j)} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial f_\rho} \right) - [T^{(i)}, T^{(j)}] = -2\varepsilon_{ijk} T^{(k)}, \tag{3}$$

$$\sum_{\rho}\left(R^{(i)}_{x\rho}\frac{\partial X^{(j)}}{\partial f_\rho} - R^{(j)}_{x\rho}\frac{\partial X^{(i)}}{\partial f_\rho}\right) - [X^{(i)},\ X^{(j)}] = -2\varepsilon_{ijk}X^{(k)}, \tag{4}$$

$$\sum_{\rho}\left(R^{(i)}_{T\rho}\frac{\partial X^{(j)}}{\partial f_\rho} - R^{(j)}_{x\rho}\frac{\partial T^{(i)}}{\partial f_\rho}\right) - [T^{(i)},\ X^{(j)}] = 0, \tag{5}$$

где

$$R^{(i)}_{T\rho} = \overline{\Psi}\,(\tau^{(\rho)}\,T^{(i)} + T^{(i)T}_{*}\,\tau^{(\rho)})\,\Psi,\quad R^{(i)}_{X\rho} = \overline{\Psi}\,(\tau^{(\rho)}\,X^{(i)} + X^{(i)T}_{*}\,\tau^{(\rho)})\,\Psi.$$

Выбрав, в частности, $T^{(i)} = -i\tau^{(i)}$, $T^{(i)}_{*} = \overset{*}{T}{}^{(i)} = i\,\overset{*}{\tau}{}^{(i)}$, из (5) находим

$$X^{(i)} = a^{(i)}\,(f_0,\ f^2) + b^{(i)}\,(f_0,\ f^2)\sum_{m=1}^{3} f_m\,\tau^{(m)}, \tag{5а}$$

$$X^{(i)}_{*} = a^{(i)}_{*}\,(f_0,\ f^2) + b^{(i)}_{*}\,(f_0,\ f^2)\sum_{m=1}^{3} f_m\,\overset{*}{\tau}{}^{(m)},$$

где $a^{(i)}$, $a^{(i)}_{*}$, $b^{(i)}$, $b^{(i)}_{*}$ — произвольные функции.

Положив

$$a^{(i)} = a^{(i)}_{*} = 0,\quad b^{(i)} = b^{(i)}_{*},\quad b^{(3)} = 2\beta, \tag{5б}$$

где $\beta = \overset{*}{\beta}$ — произвольная постоянная, из (4) найдем

$$b^{(1)} = i\beta\left\{\varphi^{-\frac{i}{4\beta\sqrt{f_0^2-f^2}}} + \varphi^{+\frac{i}{4\beta\sqrt{f_0^2-f^2}}}\right\},$$

$$b^{(2)} = \beta\left\{\varphi^{-\frac{i}{4\beta\sqrt{f_0^2-f^2}}} - \varphi^{+\frac{i}{4\beta\sqrt{f_0^2-f^2}}}\right\},$$

где

$$\varphi = \left|\frac{\sqrt{f_0^2-f^2}+f_0}{\sqrt{f_0^2-f^2}-f_0}\right|.$$

Таким образом, преобразования

$$\Psi\to\widetilde{\Psi} = \Psi - i\delta t_m\,\tau^{(m)}\,\Psi,\quad \overset{*}{\Psi}\to\widetilde{\overset{*}{\Psi}} = \overset{*}{\Psi} + i\delta t_m\,\overset{*}{\tau}{}^{(m)}\,\overset{*}{\Psi}, \tag{6}$$

$$\Psi\to\widetilde{\Psi} = \Psi + \delta\theta_m\,b^{(m)}\sum_{n=1}^{3} f_n\,\tau^{(n)}\,\Psi,$$

$$\overset{*}{\Psi}\to\widetilde{\overset{*}{\Psi}} = \overset{*}{\Psi} + \delta\theta_m\,b^{(m)}\sum_{n=1}^{3} f_n\,\overset{*}{\tau}{}^{(n)}\,\overset{*}{\Psi} \tag{7}$$

составляет искомую группу $SU(2)\otimes SU(2)$.

Если потребовать, чтобы $X^{(i)}_{*} = \overset{*}{X}{}^{(i)}$, то уравнения (4) при сделанных (5б) предположениях не имеют решения. Однако, сделав в (7) замену $b^{(1)}\to ib^{(2)}$, $b^{(2)}\to -ib^{(1)}$, мы получим преобразования, образующие вместе с (6) группу $SU(2)\otimes SU(1,\ 1)$.

Построим уравнение, инвариантное относительно преобразований (6), (7). Для этого определим ковариантную (самокомпенсирующую) производную $D_\nu\Psi$, которая при преобразованиях (2) преобразуется как:

$$D_\nu\Psi \to \overline{D_\nu\Psi} = D_\nu\Psi + \delta t_\mu M^{(\mu)} D_\nu\Psi. \tag{8}$$

Пусть

$$D_\nu\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial f_\rho}{\partial x^\nu} P^{(\rho)}(f)\Psi,$$

где $P^{(\rho)}(f)$ — 2×2 — матрицы, зависящие от f.

Условие (8) дает систему уравнений для $P^{(\rho)}(f)$:

$$R_\sigma^{(\mu)}\frac{\partial P^{(\rho)}}{\partial f_\sigma} + \frac{\partial R_\sigma^{(\mu)}}{\partial f_\rho} P^{(\sigma)} + [P^{(\rho)}, M^{(\mu)}] + \frac{\partial M^{(\mu)}}{\partial f_\rho} = 0. \tag{9}$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем частное решение уравнений (9) при $M^{(\mu)} = \{T^{(i)}, X^{(i)}\}$:

$$D_\nu\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu} + \frac{1}{2}\left\{(1-\tilde f^2)^{-1}\frac{\partial \ln\sqrt{\tilde f^2}}{\partial x^\nu}\tilde f_m\tau^{(m)} + i\tilde f^{-2}\varepsilon_{imn}\tilde f_n\frac{\partial\tilde f_i}{\partial x^\nu}\tau^{(m)}\right\}\Psi, \tag{10}$$

где

$$\tilde f_i = \frac{f_i}{f_0} = \frac{(\overline{\Psi}\tau^{(i)}\Psi)}{(\overline{\Psi}\Psi)}.$$

Уравнение поля, инвариантное относительно преобразований (6), (7), имеет вид

$$i\gamma^\nu D_\nu\Psi + \Phi(f_0^2 - f^2)\Psi = 0, \tag{11}$$

где Φ — произвольная функция, $f_0^2 - f^2$ — инвариант преобразований (6) и (7).

Заметим, что метод нелинейных представлений применялся для построения кирально-инвариантных уравнений [2]. Рассматриваемые в этом случае преобразования содержали наряду со спинорными и скалярные (мезонные) поля, причем как преобразования, так и соответствующие уравнения поля были линейны по спинорным полям. В отличие от этого в преобразования (6), (7) и в уравнение (11) входят только спинорные поля. Введение нелинейных преобразований (7) позволило расширить группу $SU(2)$ до $SU(2)\otimes SU(2)$, что привело заменой $\frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu} \to D_\nu\Psi$ к появлению нелинейных членов в уравнении (11), которые описывают взаимодействие спинорного поля с самим собой.

В заключение укажем, что в нелинейной спинорной теории [3] взаимодействие спинорного поля с самим собой описывается введением в уравнение Дирака нелинейных членов третьего порядка по спинорному полю типа члена Ψ^3 Иваненко — Бродского [4].

Автор благодарит Д. Ф. Курдгелаидзе и Д. Д. Иваненко за полезное обсуждение вопроса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стоянов Д. Ц., Христов Х. Я. Препинт ОИЯИ Р2—3725, Дубна, 1968.
2. Chang P., Gursey F. Phys. Rev., **164**, 1752, 1967; Weinberg S. Phys. Rev., **166**, 1568, 1968; Зупник Б. М., Огиевецкий В. И. Теоретическая и математическая физика», **1**, 1, 1969.
3. Гейзенберг В. Введение в единую полевую теорию элементарных частиц. М., «Мир», 1968.
4. Иваненко Д., Бродский А. А. ЖЭТФ, **24**, 384, 1953.

Поступила в редакцию
22.9 1970 г.

Кафедра
теоретической физики