Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1971

УДК 535.14

А. Б. КУКАНОВ, Б. Д. ОРИСА

К ВОПРОСУ ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТЕРЯХ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ В ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

На основе решения уравнения Френеля для гиротропной среды найдены общие выражения для векторов поляризации электромагнитного поля в этой среде. Установлена связь между двумя известными подходами к решению задачи излучения заряженной частицей в указанной среде. Дано приложение полученных общих формул к случаю излучения в гиротропной среде заряженной частицей, движущейся по винтовой линии.

Теория потерь энергии зарядом, движущимся в плазме, рассматривалась в [1, 2], причем в [1] при решении алгебраической системы уравнений для фурье-компонента $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ использовался метод разложения $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ по нормальным векторам поля $\vec{a}_l$ [3, 4] с эллиптической поляризацией, а затем потери подсчитывались по формуле

$$W = -\int (\vec{E}\vec{j})\, d\vec{r}, \tag{1}$$

выражающей мощность силы торможения, действующей на частицу со стороны создаваемого ею электромагнитного поля в среде. В [2] при рассмотрении излучения электроном, движущимся в магнитоактивной плазме, использовался гамильтонов формализм. Вычисления по формуле (1) авторы [1, 2] проводили при специальном расположении волнового вектора $\vec{k}$ относительно системы координат. В настоящей работе мы применим третий подход к решению задачи об излучении заряженной частицей, движущейся по винтовой линии в гиротропной среде, основанный на методе Ситенко и Коломенского [5] определения напряженностей полей из уравнений Максвелла без предварительного перехода к потенциалам. Этот метод использовался ранее для подсчета потерь энергии на излучение Вавилова—Черенкова в анизотропных (и гиротропных) средах [5—9] и был применен нами недавно для исследования излучения заряженной частицей, движущейся по винтовой линии в прозрачном одноосном кристалле [10, 11].

Решение уравнения Френеля и связь между подходами [1, 5] к проблеме излучения в гиротропной среде

Электромагнитное поле, возникающее в среде при движении точечного заряда e со скоростью $\vec{v}=\vec{v}(t)$, определяется системой уравнений Максвелла:

$$e_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial H_\gamma}{\partial x_\beta}=\frac{1}{c}\frac{\partial D_\alpha}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}ev_\alpha\delta(\vec{r}-\vec{r}_e(t));\quad \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\alpha}=0,$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial E_\gamma}{\partial x_\beta}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_\alpha}{\partial t},\quad \frac{\partial D_\alpha}{\partial x_\alpha}=4\pi e\delta(\vec{r}-\vec{r}_e(t)). \tag{2}$$

Здесь $e_{\alpha\beta\gamma}$ (α, β, $\gamma=1, 2, 3$; x, y, z) — тензор Леви-Чивита, $\vec{r}_e(t)$ — радиус-вектор заряженной частицы, c — скорость света в вакууме.

Разлагаем векторы напряженностей и индукций в интегралы Фурье:

$$\vec{E}(\vec{r}, t)=\iint\vec{E}(\vec{k}, \omega)\,e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\,d\vec{k}d\omega \text{ и т. д.} \tag{3}$$

Фурье-компоненты векторов электрической и магнитной индукции $\vec{D}(\vec{k}, \omega)$, $\vec{B}(\vec{k}, \omega)$ связаны с векторами $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$, $\vec{H}(\vec{k}, \omega)$ соотношениями

$$D_\alpha(\vec{k}, \omega)=\varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta(\vec{k}, \omega),\quad B_\alpha(\vec{k}, \omega)=\mu_{\alpha\beta}H_\beta(\vec{k}, \omega). \tag{4}$$

Мы будем рассматривать гиротропную анизотропную среду, пренебрегая пространственной дисперсией и диссипацией энергии в среде. Поэтому будем предполагать, что тензоры $\varepsilon_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)$ и $\mu_{\alpha\beta}=\mu_{\alpha\beta}(\omega)$ являются эрмитовыми:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\varepsilon^*_{\beta\alpha},\quad \mu_{\alpha\beta}=\mu^*_{\beta\alpha}. \tag{5}$$

Для определения фурье-компонентов $E_\beta(\vec{k}, \omega)$ мы получаем следующую неоднородную систему алгебраических уравнений:

$$T_{\alpha\nu}E_\nu(\vec{k}, \omega)=\frac{1}{4\pi^3 i\omega}\int j_\alpha(\vec{r}', t')\,e^{-i\vec{k}\vec{r}'+i\omega t'}d\vec{r}'dt', \tag{6}$$

где тензор

$$T_{\alpha\nu}=n^2e_{\alpha\beta\gamma}\mu^{-1}_{\gamma\lambda}e_{\lambda\delta\nu}\varkappa_\beta\varkappa_\delta+\varepsilon_{\alpha\nu} \tag{7}$$

также удовлетворяет условию эрмитовости.

$$n^2=\frac{k^2c^2}{\omega^2},\quad \vec{\varkappa}=\frac{\vec{k}}{k}=\{\sin\theta\cos\varphi;\ \sin\theta\sin\varphi;\ \cos\theta\}. \tag{8}$$

Воспользовавшись формулой (1), мы можем представить выражение для потерь энергии движущегося заряда в виде

$$W=\frac{e^2}{4\pi^3}\,Re\,i\int\omega^{-1}v_\nu v'_\alpha T^{-1}_{\nu\alpha}e^{i(\vec{k}[\vec{r}_e(t)-\vec{r}_e(t')])-i\omega(t-t')}\,dt'd\vec{k}d\omega. \tag{9}$$

Здесь $v'_\alpha=v_\alpha(t')$, а $T^{-1}_{\nu\alpha}$ — тензор, обратный тензору $T_{\alpha\nu}$. Элементы этого тензора, также являющегося эрмитовым, определяются по формуле

$$t^{(-1)}_{\nu\alpha}=\frac{M_{\alpha\nu}}{|T|}\ (\alpha, \nu=1, 2, 3), \tag{10}$$

где $M_{\alpha\nu}=M_{\alpha\nu}(n^2)$ — алгебраическое дополнение элемента $t_{\alpha\nu}$ в определителе $|T|=det\,T_{\alpha\nu}$, который может быть записан в виде

$$|T| = An^4 + Bn^2 + C = A(n^2 - n_{+1}^2)(n^2 - n_{-1}^2). \tag{11}$$

Величины $n_j^2 (j = \pm 1)$ являются корнями дисперсионного уравнения (уравнения Френеля):

$$|T| = |n^2 e_{\alpha\beta\gamma} \mu_{\gamma\lambda}^{-1} e_{\lambda\delta\nu} \varkappa_\beta \varkappa_\delta + \varepsilon_{\alpha\nu}| = 0. \tag{12}$$

Таким образом, выражение для потерь энергии движущегося заряда может быть записано в виде

$$W = \frac{e^2}{4\pi^3} \sum_{j=\pm 1} Rei \int \omega^{-1} \frac{M_{\alpha\nu} v_\nu v'_\alpha e^{i(\vec{k}[\vec{r}_e(t) - \vec{r}_e(t')]) - i\omega(t-t')}}{Aj(n_{+1}^2 - n_{-1}^2)(n^2 - n_j^2)} dt' d\vec{k} d\omega. \tag{13}$$

Если воспользоваться подходом [1], выражение для потерь W можно представить в другом виде. Для этого поле $\vec{E}(k, \omega)$ в (6) разложим по векторам поляризации $\vec{l}_j$, которые определим как решение следующей системы однородных уравнений:

$$(n^2 e_{\alpha\beta\gamma} \mu_{\gamma\lambda}^{-1} e_{\lambda\delta\nu} \varkappa_\beta \varkappa_\delta + \varepsilon_{\alpha\nu}) l_\nu = 0. \tag{14}$$

Условием нетривиальности решения системы (14) является равенство ее детерминанта нулю, т. е. уравнение (12). Корням n_j^2 этого уравнения соответствуют векторы $\vec{l}_j$, являющиеся решением (14). Эти векторы мы можем представить в виде [12]

$$\vec{l}_j = C_{\alpha j} \{M_{\alpha 1}^j; M_{\alpha 2}^j; M_{\alpha 3}^j\} \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Здесь $M_{\alpha\nu}^j = M_{\alpha\nu}(n_j^2)$, а α должно быть выбрано так, что хотя бы одно из $M_{\alpha\nu}^j$ было отлично от нуля. Поскольку решения (15), получающиеся при различных таких α, тождественны, мы в наиболее общем случае можем получить следующие соотношения:

$$\frac{M_{12}^j}{M_{11}^j} = \frac{M_{22}^j}{M_{21}^j}; \quad \frac{M_{13}^j}{M_{11}^j} = \frac{M_{23}^j}{M_{21}^j}; \quad \frac{M_{13}^j}{M_{12}^j} = \frac{M_{23}^j}{M_{22}^j}; \tag{16}$$

$$\frac{M_{12}^j}{M_{11}^j} = \frac{M_{32}^j}{M_{31}^j}; \quad \frac{M_{13}^j}{M_{11}^j} = \frac{M_{33}^j}{M_{31}^j}; \quad \frac{M_{13}^j}{M_{12}^j} = \frac{M_{33}^j}{M_{32}^j}; \tag{17}$$

$$\frac{M_{22}^j}{M_{21}^j} = \frac{M_{32}^j}{M_{31}^j}; \quad \frac{M_{23}^j}{M_{21}^j} = \frac{M_{33}^j}{M_{31}^j}; \quad \frac{M_{23}^j}{M_{22}^j} = \frac{M_{33}^j}{M_{32}^j}; \tag{18}$$

$|C_{\alpha j}|^2$ определяется из условия ортонормировки:

$$-e_{\alpha\beta\gamma} \mu_{\gamma\lambda}^{-1} e_{\lambda\varepsilon\nu} \varkappa_\beta \varkappa_\varepsilon l_{j\nu} l_{j'\alpha}^* = \delta_{jj'}, \tag{19}$$

или эквивалентного условия

$$\varepsilon_{\alpha\nu} l_{j\nu} l_{j'\alpha}^* = n_j^2 \delta_{jj'}. \tag{20}$$

Разлагая решение неоднородной системы (6) по векторам $\vec{l}_j$

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \sum_j E_j(\vec{k}, \omega) \vec{l}_j, \tag{21}$$

находим

$$E_j(\vec{k}, \omega) = \frac{\frac{i}{4\pi^3\omega}\int (\vec{j}(\vec{r}', t')\vec{l}_j^*)\, e^{-i\vec{k}\vec{r}'+i\omega t'}\, d\vec{r}' dt'}{n^2 - n_j^2}. \qquad (22)$$

Используя далее (21), (3) и (1), находим

$$W = -\frac{e^2}{4\pi^3}\sum_j Re\, i \int \frac{\omega^{-1}(\vec{v}\vec{l}_j)(\vec{v}'\vec{l}_j^*)\, e^{i(\vec{k}[\vec{r}_e(t)-\vec{r}_e(t')])-i\omega(t-t')}\, dt' d\vec{k} d\omega}{n^2 - n_j^2}. \qquad (23)$$

Из (20) с учетом (16) — (18) и условий $M^j_{\alpha\nu} = M^{j*}_{\nu\alpha}$ находим

$$|C_{\alpha j}|^2 = \frac{n_j^2|}{M^j_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\alpha\nu}M^j_{\alpha\nu}}. \qquad (24)$$

Прямым вычислением можно доказать, что

$$\varepsilon_{\alpha\nu}M^j_{\alpha\nu} = -jAn_j^2(n_{+1}^2 - n_{-1}^2) \qquad (25)$$

и, следовательно, окончательно

$$|C_{\alpha j}|^2 = -\frac{1}{jA(n_{+1}^2 - n_{-1}^2)M^j_{\alpha\alpha}}. \qquad (26)$$

Из (26), (16)—(18) мы получаем следующий результат:

$$(\vec{v}\vec{l}_j)(\vec{v}'\vec{l}_j^*) = -\frac{v'_\alpha v_\nu M^j_{\alpha\nu}}{jA(n_{+1}^2 - n_{-1}^2)}; \quad j = +1, -1. \qquad (27)$$

Как видим, формула (23) с помощью (27) может быть преобразована к виду (13), и вычисление потерь энергии либо методом Ситенко—Колменского по формуле (13), либо на основе подхода Шафранова по формуле (23) должно привести к идентичным результатам.

Излучение заряженной частицей, движущейся по винтовой линии в гиротропной среде

Запишем координаты частицы в функции t лабораторного времени:

$$x_e(t) = R\cos\tilde{\omega}t, \quad y_e(t) = R\sin\tilde{\omega}t, \quad z_e(t) = v_\parallel t, \qquad (28)$$

где $v_\parallel$ — постоянная составляющая скорости частицы вдоль оси z, а угловая скорость $\tilde{\omega}$ вращения частицы связана с постоянной поперечной к оси z составляющей скорости $v_\perp$ и расстоянием частицы до оси R формулой $\tilde{\omega} = v_\perp R^{-1}$. Тензоры электрической $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)$ и магнитной $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}(\omega)$ проницаемости запишем в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1; & -i\varepsilon_2; & 0 \\ i\varepsilon_2; & \varepsilon_1; & 0 \\ 0; & 0; & \varepsilon_3 \end{pmatrix}; \quad \mu_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mu_1; & -i\mu_2; & 0 \\ i\mu_2; & \mu_1; & 0 \\ 0; & 0; & \mu_3 \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

В этом случае алгебраические дополнения тензора (7) имеют вид

$$(\mu' = \mu_1^2 - \mu_2^2; \quad \varepsilon' = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2):$$

$$\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \end{pmatrix} = (\mu_3\mu')^{-1} \Big\{ \varepsilon_1\varepsilon_3\mu_3\mu' - n^2\mu_3\mu_1 [\varepsilon_1 (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \varepsilon_3\varkappa_3^2] -$$

$$- n^2\mu'\varepsilon_3 \begin{pmatrix} \varkappa_1^2 \\ \varkappa_2^2 \end{pmatrix} + n^4 [\mu_1 (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \mu_3\varkappa_3^2] \begin{pmatrix} \varkappa_1^2 \\ \varkappa_2^2 \end{pmatrix} \Big\}; \qquad (30)$$

$$M_{33} = (\mu_3\mu')^{-1} \{\mu_3\mu'\varepsilon' - \varepsilon_1\mu' (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) n^2 - 2n^2\mu_3 (\varepsilon_1\mu_1 + \varepsilon_2\mu_2) \varkappa_3^2 +$$

$$+ n^4\varkappa_3^2 [\mu_1 (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \mu_3\varkappa_3^2]\}; \qquad (31)$$

$$M_{12} = M_{21}^* = (\mu_3\mu')^{-1} \{n^4\varkappa_1\varkappa_2 [\mu_1 (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \mu_3\varkappa_3^2] -$$

$$- n^2\varepsilon_3\mu'\varkappa_1\varkappa_2 - i\mu_3 (\varepsilon_3\varepsilon_2\mu' + \varepsilon_3\mu_2\varkappa_3^2 n^2 - \varepsilon_2\mu_1 (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) n^2)\}; \qquad (32)$$

$$\begin{pmatrix} M_{13} = M_{31}^* \\ M_{23} = M_{32}^* \end{pmatrix} = (\mu_3\mu')^{-1} \Big\{ [n^4 (\mu_1 (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \mu_3\varkappa_3^2) -$$

$$- n^2\mu_3 (\varepsilon_1\mu_1 + \varepsilon_2\mu_2)] \begin{pmatrix} \varkappa_1\varkappa_3 \\ \varkappa_2\varkappa_3 \end{pmatrix} + in^2\mu_3 (\varepsilon_1\mu_2 + \mu_1\varepsilon_2) \begin{pmatrix} \varkappa_2\varkappa_3 \\ -\varkappa_1\varkappa_3 \end{pmatrix} \Big\}. \qquad (33)$$

При расчете по формуле (13) мы получаем следующее выражение для потерь энергии в единицу времени заряженной частицей, движущейся по траектории (28):

$$W = -\frac{e^2}{c^3} \sum_{j=\pm 1} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty \frac{n_j\omega^2 \langle \ldots \rangle_j \,\delta (\omega\beta_\parallel \cos\theta\, n_j + \widetilde{\omega}\nu - \omega)\, d\omega}{jA (n_{+1}^2 - n_{-1}^2)\, \mu_3\mu'}, \qquad (34)$$

$$\langle \ldots \rangle_j = 2v_\parallel v_\perp \sin\theta \cos\theta \mu_3 (\varepsilon_1\mu_2 + \mu_1\varepsilon_2) n_j^2 \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} J'_\nu (y_j) J_\nu (y_j) +$$

$$+ 2v_\perp^2 [\varepsilon_2\mu_1\mu_3 \sin^2\theta n_j^2 - \varepsilon_3\mu_2\mu_3 \cos^2\theta n_j^2 - \varepsilon_3\varepsilon_2\mu_3\mu'] \times$$

$$\times \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left(\frac{\nu}{y_j}\right) J'_\nu (y_j) J_\nu (y_j) + 2v_\parallel v_\perp \sin\theta \cos\theta n_j^2 \times$$

$$\times [n_j^2 (\mu_3 \cos^2\theta + \mu_1 \sin^2\theta) - \mu_3 (\varepsilon_1\mu_1 + \varepsilon_2\mu_2)] \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left(\frac{\nu}{y_j}\right) J_\nu^2 (y_j) +$$

$$+ v_\perp^2 [\varepsilon_1\varepsilon_3\mu_3\mu' - \mu_1\mu_3 n_j^2 (\varepsilon_1 \sin^2\theta + \varepsilon_3 \cos^2\theta)] \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left(J_\nu'^2 (y_j) + \left(\frac{\nu}{y_j}\right)^2 J_\nu^2 (y_j)\right) +$$

$$+ v_\perp^2 \sin^2\theta [n_j^2 (\mu_3 \cos^2\theta + \mu_1 \sin^2\theta) - \mu'\varepsilon_3] n_j^2 \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left(\frac{\nu}{y_j}\right)^2 J_\nu^2 (y_j) +$$

$$+ v_\parallel^2 \sin^2\theta n_j^2 \varepsilon_3^{-1} [\mu_1\mu_3\varepsilon' - \varepsilon_1 (\mu_3 \cos^2\theta + \mu_1 \sin^2\theta) n_j^2] \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} J_\nu^2 (y_j). \qquad (35)$$

Здесь

$$\beta_\parallel = \frac{v_\parallel}{c}, \quad J_\nu (y_j) = J_\nu \left(\frac{\omega n_j \sin\theta R}{c}\right), \quad J'_\nu (y_j) = J'_\nu \left(\frac{\omega n_j \sin\theta R}{c}\right),$$

конкретное выражение для n_j дается формулой (8) работы [9]. При подсчете потерь энергии по формуле (23) положим в (15) и (24) $\alpha = 3$. В этом случае мы имеем

$$\vec{l}_j = C_{3j}(\mu_3\mu')^{-1} n_j^2 \{\varkappa_1\widetilde{\alpha}_1^j - i\varkappa_2\widetilde{\alpha}_2^j;\ \varkappa_2\widetilde{\alpha}_1^j + i\varkappa_1\widetilde{\alpha}_2^j;\ \widetilde{\alpha}_3^j\}. \tag{36}$$

$$W = -\frac{e^2}{c^3}\sum_{j=\pm 1}\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty \frac{n_j^3\omega^2 \langle\ldots\rangle_j\, \delta(\omega\beta_\parallel \cos\theta n_j + \widetilde{\omega}\nu - \omega)\, d\omega}{jA(n_{+1}^2 - n_{-1}^2)\,\mu_3\mu'\widetilde{\alpha}_3^j}; \tag{37}$$

$$\langle\ldots\rangle_j = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty}\left\{\left(\frac{\widetilde{\alpha}_1^j v_\perp \sin\theta\nu}{y_j} + \widetilde{\alpha}_3^j v_\parallel\right) J_\nu(y_j) + \widetilde{\alpha}_2^j v_\perp \sin\theta J'_\nu(y_j)\right\}^2; \tag{38}$$

$$\widetilde{\alpha}_1^j = [n_j^2(\mu_1\sin^2\theta + \mu_3\cos^2\theta) - \mu_3(\varepsilon_1\mu_1 + \varepsilon_2\mu_2)]\cos\theta; \tag{39}$$

$$\widetilde{\alpha}_2^j = \mu_3(\varepsilon_1\mu_2 + \mu_1\varepsilon_2)\cos\theta; \tag{40}$$

$$\widetilde{\alpha}_3^j = \varepsilon_3^{-1}[\mu_1\mu_3\varepsilon' - \varepsilon_1(\mu_1\sin^2\theta + \mu_3\cos^2\theta) n_j^2]\sin^2\theta. \tag{41}$$

Формулы (37), (38) являются компактной записью энергетических потерь в единицу времени заряженной частицей, движущейся по винтовой линии в гиротропной среде, причем результаты (34), (35) и (37), (38) — взаимно преобразуемы. Однако для перехода к случаю анизотропной среды ($\varepsilon_2 \to 0$, $\mu_2 \to 0$) целесообразнее пользоваться формулами (34), (35), чтобы избежать раскрытия неопределенностей, возникающих в (37), (38) для одного из j. Получающиеся при этом результаты совпадают с формулами (13)—(15) работы [10], которые в свою очередь в различных частных случаях совпадают с уже известными результатами [13—15]. Наконец, чтобы получить формулы работы Шафранова [1], следует взять $\vec{l}_j$ в (15) при $\alpha=2$, положив при этом $\varphi=0$. Мы тогда получим формулы (6,52) и (6,55) работы [1]:

$$\vec{l}_j = C_{2j} M_{22}^j \left\{\frac{M_{21}^j}{M_{22}^j};\ 1;\ \frac{M_{23}^j}{M_{22}^j}\right\} = a_y^j\{i\alpha_x^\circ;\ 1;\ i\alpha_z^\circ\} \tag{42}$$

причем, как это следует из (20), $|a_y^j|^2 = \frac{1}{1+\alpha_x^2}$. Здесь $\mu_1 = \mu_3 = 1$, $\mu_2 = 0$,

$$\alpha_x = \frac{-\varepsilon_2\varepsilon_3\cos\theta}{n_j^2(\varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_3\cos^2\theta) - \varepsilon_1\varepsilon_3}; \tag{43}$$

$$\alpha_x^\circ = \frac{-\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2 n_j^2\sin^2\theta}{n_j^2(\varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_3\cos^2\theta) - \varepsilon_1\varepsilon_3};\quad \alpha_z^\circ = \frac{\varepsilon_2\sin\theta\cos\theta n_j^2}{n_j^2(\varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_3\cos^2\theta) - \varepsilon_1\varepsilon_3}. \tag{44}$$

Формулы (43) и (44) совпадают с формулами (1,34)—(1,36) работы Шафранова [1], если в них положить $\xi = f = 0$, $g = -\varepsilon_2$.

В заключение авторы благодарят проф. А. А. Соколова за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В. Д. Сб. Вопросы теории плазмы, т. 3. М., Госатомиздат, 1963.
2. Эйдман В.Я. ЖЭТФ, 34, 131, 1958.
3. Гинзбург В. Л. ЖЭТФ, 10, 601, 1940.
4. Коломенский А. А. ЖЭТФ, 24, 167, 1953.

5. Ситенко А. Г., Коломенский А. А. ЖЭТФ, **30**, 511, 1956.
6. Бегиашвили Г. А., Гедалин Э. В. ЖЭТФ, 35, 1513, 1958.
7. Куканов А. Б. «Оптика и спектроскопия», **14**, 121, 1963.
8. Куканов А. Б., Тхай Куан. «Оптика и спектроскопия», **15**. 124, 1963.
9. Куканов А. Б. «Изв. вузов», физика, № 1, 47, 1970.
10. Куканов А. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **12**, № 5, 1971.
11. Куканов А. Б., Ориса Б. Д. «Оптика и спектроскопия», **32**, 1972.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., «Наука», 1968.
13. Цытович В. Н. «Вестн. Моск. ун-та», мат., мех., астрон., физ., химия, № 11, 27, 1951.
14. Соколов А. А., Жуковский В. Ч. и др. «Изв. вузов», физика, № 2, 107, 1969.
15. Schott G. Electromagnetic Radiation. Cambridge, 1912.

Поступила в редакцию
3.3 1971 г.

Кафедра
теоретической физики