

В. П. КАНДИДОВ, С. С. ЧЕСНОКОВ

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются различные дискретные модели из конечных элементов для изучения поперечных колебаний крыла большого удлинения. Для моделей из однородных элементов приведены частотные уравнения, при получении которых использовались фундаментальные системы решений, подобные системе функций Крылова. Составлены некоторые рекомендации по применению таких моделей для решения конкретных краевых задач. Предложено несколько неоднородных элементов с различными функциями изменения жесткости вдоль длины. Показано, что точность модели из неоднородных элементов примерно вдвое выше, чем у модели из такого же числа однородных.

Для расчета динамики распределенных колебательных систем существуют различные приближенные методы. Одним из них является сформировавшийся в последние годы метод конечных элементов. Согласно этому методу [1] исследуемая конструкция заменяется некоторой дискретной моделью из однотипных элементов. Относительно свойств элемента принимается ряд предположений, позволяющих определить его движение и деформацию конечным числом обобщенных координат и получить линейную связь между координатами и силами. В ряде случаев такой элемент представляется гипотетической механической моделью. В общих точках соседних элементов, называемых узлами, на координаты и силы накладываются определенные условия сопряжения. Возникающие при движении конструкции распределенные нагрузки, например инерционные и аэродинамические, сводятся к системе сосредоточенных сил, приложенных в узлах модели. Поскольку элементы модели однотипны, т. е. отличаются только размерами и значениями параметров, то для записи уравнений движения всей модели в целом достаточно получить аналитическое описание свойств отдельного элемента. Приближая свойства элемента к свойствам соответствующей части конструкции, можно повысить точность аппроксимации без увеличения числа степеней свободы дискретной модели и без значительного увеличения объема вычислений.

Представляет интерес применение этого метода к исследованию динамики конструкций балочного типа. Различные модели стержней из конечных элементов с постоянными параметрами приведены в [2 и 3].

Применение моделей из однородных элементов для исследования флаттера изложено в [4], для исследования динамической устойчивости под действием продольных сил в [5]. Большое внимание уделяется вопросу повышения точности метода конечных элементов. Так, в [6] для этой цели используется довольно искусственный прием, в [7], [8], [9] вводятся элементы, параметры которых линейно зависят от координаты элемента.

В настоящей работе получены аналитически решения для уравнений собственных колебаний различных моделей стержня из однородных элементов. Это позволяет оценить преимущества и недостатки тех или иных моделей в конкретных задачах. Кроме того, построен ряд неоднородных элементов с различными законами изменения жесткости вдоль длины. Эффективность применения неоднородных элементов демонстрируется на примере расчета собственных колебаний конкретных конструкций.

1. Рассмотрим наиболее простые упруго-массовые модели стержня из однородных элементов (рис. 1). Элементы моделей № 1 и 2 состоят из невесомых крестовин с пружинами жесткости  $\frac{EI_n}{h^2 l}$ , где  $EI_n$  — средняя изгибная жесткость на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$ . В модели № 1 на концах помещены точечные массы  $\frac{m_n}{2}$ ; в модели № 2 к крестовинам подвешены однородные, абсолютно жесткие отрезки массой  $m_{n+\frac{1}{2}}$ .

$$\text{Здесь } m_n = \int_{x_n - l/2}^{x_n + l/2} \rho(x) dx, \quad m_{n+\frac{1}{2}} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \rho(x) dx,$$

где  $\rho(x)$  — погонная плотность стержня. Между собой элементы соединяются концами пружин и идеальными шарнирами, находящимися на крестовинах. У двух других моделей упругие свойства элемента представлены отрезком невесомого однородного стержня с жесткостью  $EI_{n+\frac{1}{2}}$ . В модели № 3 на концах стержней находятся точечные массы  $\frac{m_n}{2}$  которыми элементы жестко соединяются между собой. В модели № 4 отрезки  $m_{n+\frac{1}{2}}$  шарнирно связаны с концами упругих стержней и не препятствуют их изгибу. Концы соседних упругих стержней в модели жестко скреплены.

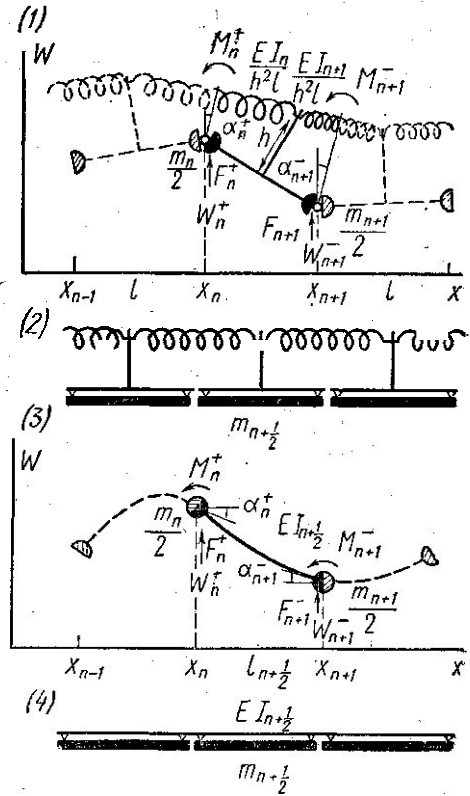


Рис. 1

Деформация и движение каждого элемента всех моделей описываются четырьмя обобщенными координатами: смещениями  $w_n^+$ ,  $w_{n+1}^-$  и углами  $\alpha_n^+$  и  $\alpha_{n+1}^-$ . Обобщенные силы  $F_n^+$ ,  $F_{n+1}^-$ ,  $M_n^+$  и  $M_{n+1}^-$ , приложенные к концам элемента, имеют вид линейных форм от его координат. Коэффициенты линейных форм образуют динамическую матрицу [2]. Обобщенные координаты и силы соседних элементов подчиняются условиям сопряжения:  $w_n^+ = w_n^-$ ;  $\alpha_n^+ = \alpha_n^-$ ;  $F_n^+ + F_n^- = 0$ ;  $M_n^+ + M_n^- = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ). Уравнения связи обобщенных сил и координат для каждого элемента и условия сопряжения образуют систему уравнений движения модели. При этом между обобщенными координатами  $w$  и  $\alpha$  существует линейная связь, и число независимых переменных (степеней свободы) у модели равно числу элементов.

2. Для оценки точности моделей № 1—4 рассмотрим свободные колебания однородного стержня ( $EI_{n+\frac{1}{2}} = EI_n = EI$ ;  $I_{n+\frac{1}{2}} = I$ ;  $m_{n+\frac{1}{2}} = m_n = m$ ). Уравнения движения моделей в этом случае можно записать в конечно-разностной форме:

$$\beta m \Delta_n^4 \ddot{w}(t) + \gamma m \Delta_n^2 \ddot{w}(t) + m \ddot{w}_n(t) + \frac{EI}{l^3} \Delta_n^4 w(t) = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta$  — оператор конечной разности ( $\Delta_n^2 w = w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}$  и т. д.),  $N$  — число элементов модели,  $\beta, \gamma$  — некоторые коэффициенты: для модели № 1  $\beta = \gamma = 0$  для моделей № 2 и 3  $\beta = 0, \gamma = \frac{1}{6}$  для модели № 4  $\beta = \frac{1}{36}$  и  $\gamma = \frac{1}{3}$ .

На основе [10] разработана стандартная методика, которая позволяет найти фундаментальную систему решений уравнения (1), подобную системе функций Крылова для непрерывного стержня. С помощью этих функций можно получить уравнения частот моделей при разнообразных граничных условиях.

В частности, уравнения частот для моделей свободного стержня имеют вид

$$\cos \kappa l N \operatorname{ch} \kappa l N - 1 + \frac{1}{2} \sin \kappa l N \operatorname{sh} \kappa l N \left[ P(\beta\gamma) R(\beta\gamma) - \frac{1}{P(\beta, \gamma) R(\beta, \gamma)} \right] = 0,$$

для моделей консольного стержня

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cos \kappa l N \operatorname{ch} \kappa l N \left[ P(\beta, \gamma) + \frac{1}{P(\beta, \gamma)} \right] + 1 + \\ & + \frac{1}{2} \sin \kappa l N \operatorname{sh} \kappa l N \left[ R(\beta, \gamma) - \frac{1}{R(\beta, \gamma)} \right] = 0, \end{aligned}$$

где

$$R(\beta, \gamma) = \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa l}{2}}{\sin \frac{\kappa l}{2}} \right)^{6(\gamma-6\beta)} \frac{\cos \frac{\kappa l}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\kappa l}{2}}; \quad P(\beta, \gamma) = \left( \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\kappa l}{2}}{\sin^2 \frac{\kappa l}{2}} \right)^{\pm 6(\gamma-12\beta)}$$

Знак плюс относится к модели № 2, знак минус — к модели № 3.

Собственные частоты моделей  $\omega_i^*$  выражаются через корни частотных уравнений  $\kappa_i$  и  $k_i$  по формулам

$$\omega_i = 4 \sqrt{\frac{EJ}{\rho} \frac{N^2}{L^2}} \sin^2 \frac{\kappa_i l}{2} \left( \frac{3}{2 \cos^2 \frac{\kappa_i l}{2} + 1} \right)^{3\gamma} =$$

$$= 4 \sqrt{\frac{EI}{\rho} \frac{N^2}{L^2}} \operatorname{sh}^2 \frac{k_i l}{2} \left( \frac{3}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{k_i l}{2} + 1} \right)^{3\gamma}, \quad (2)$$

где  $i$  — номер тона. При  $N \rightarrow \infty$  соотношения (2) стремятся к дисперсионному соотношению непрерывного стержня  $\omega_i = \sqrt{\frac{EJ}{\rho} b_i^2}$ , где  $b_i$  — волновое число. Уравнения частот моделей при  $N \rightarrow \infty$  переходят в соответствующие частотные уравнения непрерывного стержня.

Практический интерес представляет сравнение точности моделей при небольшом числе элементов. Для этого удобно ввести относительное отклонение  $\varepsilon$  собственных частот модели от известных частот однородного стержня [11], т. е.  $\varepsilon_i = \frac{\omega_i^* - \omega_i}{\omega_i}$ . На рис. 2 пред-

ставлена зависимость для первых трех тонов консольного однородного стержня от числа элементов моделей  $N$ . Сплошная линия относится к модели № 1, линия из точек — к модели № 2 и 3, пунктирная линия — к модели № 4. Из графика видно, что наибольшие ошибки у модели № 1. Вторая и третья модели имеют одинаковые погрешности, которые примерно в 2 раза меньше соответствующих погрешностей первой модели. Ошибка модели № 4 для первого тона на порядок меньше ошибки модели № 1.

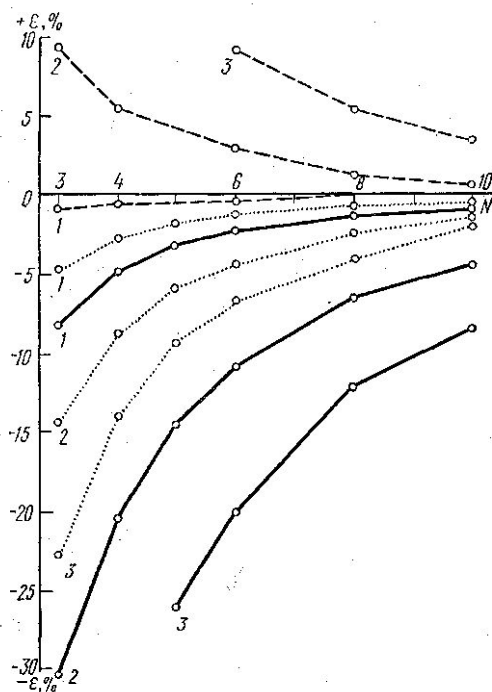


Рис. 2

Таблица 1

Условия закрепления	Модель			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Консоль	~12	9	9	7
Свободные оба конца	~18	5	~14	~12
Открытые оба конца	~14	4	4	~14

Сравнение, проведенное при других закреплениях концов, показывает, что рассмотренные модели по-разному воспроизводят граничные условия. Это оказывается существенным при построении моделей с малым числом элементов. В табл. 1 указано минимальное число элементов, которое должна иметь модель однородного стержня для воспроизведения первых трех тонов с точностью не хуже 2%.

Из приведенных результатов следует, что нельзя указать модель, которая была бы лучше других при всех граничных условиях.

3. При замене неоднородной распределенной системы моделью из однородных элементов зависимость параметров системы от координаты  $x$  представляется некоторой ступенчатой функцией. Такая аппроксимация существенно влияет на точность расчета независимо от качества модели. Поэтому целесообразно построение моделей из неоднородных элементов с различной зависимостью параметров от продольной координаты.

Рассмотрим модель, элементы которой состоят из невесомых упругих стержней с некоторыми распределениями жесткости  $EI_{n+\frac{1}{2}}(x)$ .

На концах стержней помещены точечные массы.

Пусть жесткость отрезка упругого стержня в элементе имеет вид

$$EI_{n+\frac{1}{2}}(x) = EI_n \left( 1 + R_{n+\frac{1}{2}} \frac{x-x_n}{l_{n+\frac{1}{2}}} \right)^3, \quad (3)$$

где

$$R_{n+\frac{1}{2}} = \sqrt[5]{\frac{EI_{n+1}}{EI_n}}$$

Такую жесткость имеет равномерно утончающийся клин постоянной ширины. В практике часто оказывается удобным представлять в виде подобного клина всю непрерывную систему или ее часть. Форма прогиба такого элемента будет

$$\omega_{n+\frac{1}{2}}(x, t) = \left[ A(t) + B(t) \frac{x}{l} + C(t) \frac{1}{1+R \frac{x}{l}} + D(t) \ln \left( 1 + R \frac{x}{l} \right) \right]_{n+\frac{1}{2}}$$

Матрица жесткости, полученная методом виртуальных перемещений [2], приведена на стр. 421.

Чтобы оценить эффективность использования клиновидных элементов, рассмотрим собственные колебания консольных клиньев с разным отношением толщин на концах. Для этой задачи имеются приближенные решения, полученные методом Ритца [12]. В табл. 2 приведены относительные отклонения первой собственной частоты модели из клиновидных элементов от частоты по Ритцу. Для сравнения там же даны

$\left(\frac{l^3}{EI}\right)_{n+\frac{1}{2}} F_n^+$	$\frac{R^4 + 2R^3}{(R+1)^2}$	$\omega_n^+$
$\left(\frac{l^3}{EI}\right)_{n+\frac{1}{2}} F_{n+1}^-$	$-\frac{R^4 + 2R^3}{(R+1)^2}$	$\omega_{n+1}^-$
$\left(\frac{l^2}{EI}\right)_{n+\frac{1}{2}} M_n^+$	$\frac{R^3}{(R+1)^2} - \frac{R^3}{(R+1)^2}$	$l_{n+\frac{1}{2}} \omega_n^+$
$\left(\frac{l^2}{EI}\right)_{n+\frac{1}{2}} M_{n+1}^-$	$\frac{R^3}{(R+1)} - \frac{R^3}{(R+1)}$	$l_{n+\frac{1}{2}} \omega_{n+1}^-$
	симметрично	$x$
		$n + \frac{1}{2}$

$$\Delta_{n+\frac{1}{2}} = \left[ \ln(R+1) \left( 1 - \frac{1}{(R+1)^2} \right) - \frac{2R^2}{(R+1)^2} \right]_{n+\frac{1}{2}}$$

Таблица 2

Отношение толщин на концах	Число элементов	ε% для модели	
		из клино- видных элементов	из однород- ных эле- ментов
1,5	3 5	-4,5 -1,2	-8,6 -2,8
4	5	-5,9	-12,1

результаты для соответствующей модели из такого же числа однородных элементов. Из таблицы видно, что ошибки модели из клиновидных элементов примерно вдвое меньше ошибок соответствующих моделей из однородных элементов.

Более универсальными являются элементы с жесткостью, меняющейся по закону:

$$EI_{n+\frac{1}{2}}(x) = EI_n \left( a_{n+\frac{1}{2}} \frac{(x-x_n)^2}{l^2} + b_{n+\frac{1}{2}} \frac{(x-x_n)}{l} + 1 \right), \quad (4)$$

где  $a_{n+\frac{1}{2}}$  и  $b_{n+\frac{1}{2}}$  — параметры, зависящие от значений жесткости на концах элемента и в некоторой промежуточной точке. В этом случае матрица жесткости элемента имеет вид

$$\begin{pmatrix} (12 + 6b + \frac{24}{5}a) & & & & \\ - (12 + 6b + \frac{24}{5}a) & (12 + 6b + \frac{24}{5}a) & & & \\ (6 + 2b + \frac{7}{5}a) & - (6 + 2b + \frac{7}{5}a) & (4 + b + \frac{8}{15}a) & & \\ (6 + 4b + \frac{17}{5}a) & - (6 + 4b + \frac{17}{5}a) & (2 + b + \frac{13}{15}a) & (4 + 3b + \frac{38}{15}a) & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

симметрично

При  $a=0$  эта матрица переходит в матрицу элемента с линейно меня-

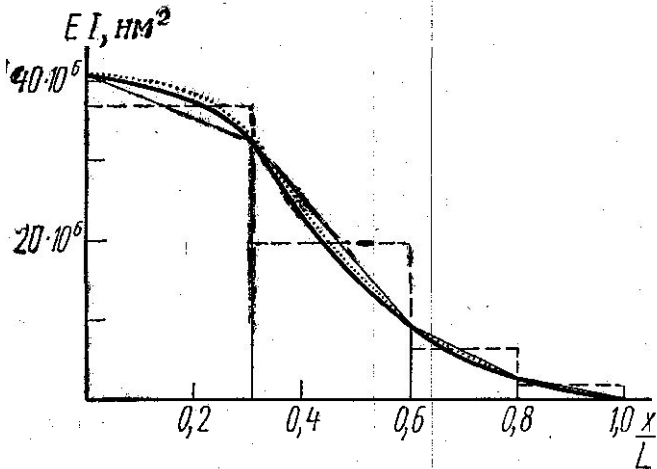


Рис. 3

ющейся жесткостью, [7, 8], а при  $b=0, a=0$  в матрицу жесткости элемента модели № 3.

4. Рассмотренные неоднородные элементы являются однотипными и их можно использовать в одной модели. В качестве примера применения моделей из неоднородных элементов рассмотрена задача о вы-

числении частот изгибных колебаний крыла самолета. Упруго-массовые характеристики некоторых крыльев и частоты их первых тонов, вычисленные методом последовательных приближений, взяты из [13]. На рис. 3 сплошной линией изображена зависимость изгибной жесткости крыла II от координаты  $x$ ; пунктирной линией — аппроксимация жесткости при построении модели из однородных элементов (случай а); штрих-пунктирной линией — модели из элементов с линейно-меняющейся жесткостью (случай б); точками — модели из элементов, жесткость которых наиболее близка к жесткости крыла и описывается полиномами [3 и 4] (случай в).

Таблица 3

	Число элементов	ε % для модели		
		случай а	случай б	случай в
Крыло I	7	-2,9	-0,5	-0,1
Крыло II	4	-7,8	-3,3	-2,9
	—	-4,1	-1,1	-0,8

В табл. 3 приведены относительные отклонения частот моделей от частот, полученных в [13]. Видно, что для воспроизведения частоты первого тона изгибных колебаний рассмотренных крыльев с точностью не хуже 3%, достаточно взять модель из неоднородных элементов, имеющую всего 4 степени свободы. Для достижения такой же точности модель из однородных элементов должна иметь вдвое больше степеней свободы. Аналогичные результаты получены для крыла I.

В результате проведенного анализа получены некоторые рекомендации по использованию той или иной модели из однородных элементов для расчета колебаний конкретных балочных систем. На ряде примеров показано, что применение моделей из неоднородных элементов с различными законами изменения жесткости вдоль длины позволяет точнее аппроксимировать упругие свойства исходной системы и тем самым уменьшить ошибку при анализе ее динамики без увеличения числа степеней свободы модели.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Меллош Р. Дж. «Ракетная техника и космонавтика», № 7, 1963.
2. Leckie F. A., Lindberg G. M. The Aeronautical Quarterly, 14, 1963.
3. Archer J. S. Journ. of the structural division. Proceedings of the ASCE, No. 8, 1963.
4. Адамчук И. Д., Кандидов В. П., Ким Л. П. «Изв. вузов», авиационная техника, № 4, Казань, 1968.
5. Браун Дж. Е., Хатт Дж. М., Салама А. Е. «Ракетная техника и космонавтика», № 7, 1968.
6. Cohen E., Meacellion H. Intern. Journ. of Numerical Methods in Engineering, 1, 1969.
7. Арчер Дж. С. «Ракетная техника и космонавтика», № 10, 1965.
8. Kanvar K. K. J. Acoust. Soc. of America, 40, 1966.
9. Krishna Murty A. V., Prabhakaran K. P. The Aeronautical Quarterly, 20, 2, 1965.
10. Кандидов В. П., Ким Л. П. «Вестн. Моск. ун-та», физ., astron., № 5, 1968.
11. Стрелко С. П. «Введение в теорию колебаний». М., «Наука», 1964.
12. Тимошенко С. П. «Колебания в инженерном деле». М., «Наука», 1967.
13. Гроссман Е. П. Флаттер. Труды ЦАГИ, вып. 284, 1937.

Поступила в редакцию  
29.7.1970 г.

Кафедра  
общей физики для мехмата