Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1971

УДК 538.567.43

А. Г. КУЛЬКИН, Ю. М. ЛОСКУТОВ, Ю. Г. ПАВЛЕНКО

# ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Показано, что при параметрическом воздействии переменного магнитного поля на систему нерелятивистских частиц в определенных условиях индуцированное излучение превалирует над поглощением.

Индуцированное синхронное излучение электронов в постоянном однородном поле рассматривалось в ряде теоретических и экспериментальных работ [1—4]. Этот эффект появляется в слаборелятивистском случае на частотах, близких к циклотронной частоте [1], и в ультрарелятивистском пределе на гармониках циклотронной частоты [2]. При нерелятивистских энергиях электронов возможно только вынужденное поглощение.

В настоящей заметке показано, что при движении нерелятивистских заряженных частиц в переменном магнитном поле в определенных условиях индуцированное излучение превалирует над индуцированным поглощением.

Рассмотрим движение частицы с зарядом $e$ в магнитном поле:

$$H(t)=\begin{cases} H, & t<0, \\ Hf(t), & t\geqslant 0, \end{cases} \qquad f(t)=1+h\cos w_1 t. \tag{1}$$

Здесь $H$ — ведущее поле, $h$ — коэффициент модуляции ($h \ll 1$). Изменение во времени магнитного поля приводит к появлению вихревого электрического поля с напряженностью

$$\vec{E}\sim=\frac{H\dot{f}}{2c}(y,\ -x,\ 0). \tag{2}$$

Рассматривая среднюю мощность, передаваемую частице вихревым электрическим полем, можно заключить, что если частота $\omega_1$ близка к циклотронной частоте $\omega_0=\frac{eH}{mc}$ то переменная составляющая магнитного поля оказывает наиболее интенсивное воздействие на движение частицы. Далее рассматривается именно этот случай.

В присутствии электромагнитной волны, напряженность которой в дипольном приближении равна

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{v}} \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{i\omega}{c} \left(C_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega t} - C^*_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega t}\right) \vec{e}_\lambda, \tag{3}$$

уравнения движения частицы имеют вид

$$\ddot{u} + i\omega f\dot{u} + \frac{i\omega}{2} fu = \frac{e}{m} E_+, \quad \ddot{z} = \frac{e}{m} E_z = 0, \tag{4}$$

где $u = x + iy$, $E_+ = E_x + iE_y$. Переходя к новой переменной $w$

$$u = w \exp\left[-\int \frac{i\omega_0}{2} f dt\right], \tag{5}$$

получим уравнение

$$\ddot{w} = \left(\frac{\omega_0}{2} f\right)^2 w = \frac{e}{m} E_+ \exp\left[\int \frac{i\omega_0}{2} f dt\right]. \tag{6}$$

Мгновенная мощность индуцированного излучения, усредненная по начальным фазам частиц [5], определяется выражением

$$P = -en \langle \vec{v}_1 \vec{E} \rangle = -en Re \langle \dot{u}_1 E_- \rangle, \tag{7}$$

где $\vec{v}_1$ — возмущение скорости частицы, обусловленное воздействием электромагнитной волны (3), $n$ — плотность частиц.

Найдем решение уравнения (6) в случае параметрического воздействия переменного магнитного поля с частотой $\omega_1 \approx \omega_0$, т. е. в области неустойчивости (см. (11)). Для этого воспользуемся методом Н. Н. Боголюбова [6] или методом усреднения в форме, предложенной П. Л. Капицей [7].

Из решения уравнений (6) следует, что в отсутствие электромагнитной волны (3) частица движется по спиралеобразной кривой. Радиус кривизны спирали и расстояние от оси симметрии магнитного поля до центра спирали экспоненциально нарастают со временем. Центр спирали вращается с угловой скоростью $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_0) = \frac{\Delta\omega}{2}$, а вокруг этого центра обращаются частицы с угловой скоростью $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_0)$. В стационарном режиме $\lambda t \gg 1$ частица движется по разворачивающейся спирали, периодически (с периодом $2\pi/\omega_1$) проходя вблизи оси магнитного поля. Таким образом, система частиц характеризуется двумя собственными квазичастотами $\Omega_1 = \left|\frac{\Delta\omega}{2}\right|$ и $\Omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_0)$. Мы рассмотрим взаимодействие частицы с электромагнитной волной (3), частота которой $\omega \approx \Omega_2$. В этом случае интересующее нас решение неоднородного уравнения (4) имеет вид

$$\dot{u}_1 = -\frac{i}{2}(\omega_0 + \omega_1) b \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega_0 + \omega_1) t\right], \tag{8}$$

$$b = a_1 e^{\lambda t - i\gamma} + b_1 e^{-\lambda t + i\gamma}, \tag{9}$$

$$\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta\lambda^2}, \quad \lambda_1 = \frac{\omega_0^2}{2\omega_1} h, \quad \Delta\lambda = \frac{1}{4\omega_1}\left[(\omega_1^2 - \omega_0^2) - \frac{\omega_0^2 h^2}{2}\right],$$

$$\cos\gamma = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}, \quad \sin\gamma = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad \Delta\omega = \omega - \Omega_2, \tag{10}$$

$$a_1 = \frac{1}{2i\sin\gamma}\frac{e}{m}\frac{\omega}{\omega_1}\sqrt{\frac{4\pi}{V}}C_+\int_0^t e^{-\lambda t' - i\Delta\omega t'}\,dt',$$

$$b_1 = -\frac{1}{2i\sin\gamma}\frac{e}{m}\frac{\omega}{\omega_1}\sqrt{\frac{4\pi}{V}}C_+\int_0^t e^{\lambda t' - i\Delta\omega t'}\,dt'.$$

Из (8) — (10) видно, что если частота $\omega_1$ лежит в интервале

$$\omega_0\sqrt{1-h+\frac{h^2}{2}} \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_0\sqrt{1+h+\frac{h^2}{2}}, \tag{11}$$

то возникает главный резонанс. Заметим, что при точном резонансе $\Delta\omega_1 = 0$, $\Omega_2 = \omega_0$:

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\frac{h^2}{4}} \approx 1,\ \cos\gamma = -\frac{h}{2} \approx 0,\ \lambda \approx \frac{\omega_0 h}{4}.$$

Подставляя (8) в (7), опуская нерезонансные слагаемые и суммируя по значениям $\vec{k}$, $\lambda$, соответствующим электромагнитной волне со спектральной интенсивностью

$$I_{\vec{k}}(\omega) = \frac{2\omega^4 c}{(2\pi c)^3}\sum_{\lambda=1,2}|C_\lambda|^2,$$

получим выражение для мгновенной мощности индуцированного излучения:

$$dP = P\,d\omega\,d0;$$

$$P(t,\omega) = \frac{2\pi n e^2}{m\omega_1\sin\gamma}\frac{I(\omega)}{\lambda^2+\Delta\omega^2}\{\Delta\omega(\operatorname{ch}\lambda + \sin\Delta\omega t\sin\gamma + \operatorname{sh}\lambda t\cos\Delta\omega t\cos\gamma) + $$
$$+\lambda(\operatorname{sh}\lambda t\cos\Delta\omega t\sin\gamma - \operatorname{ch}\lambda t\sin\Delta\omega t\cos\gamma)\}, \tag{12}$$

где $\Delta\omega = \omega_0 - \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)$. В нашей постановке задачи диссипативные процессы, связанные с соударениями частиц и другими релаксационными процессами, должны быть учтены дополнительно. В случае, когда столкновения существенно изменяют движение частиц (это соответствует $\tau < 1/\lambda$, где $\tau$ — среднее время свободного пробега) среднее значение мощности может быть определено [8] выражением

$$P_{\text{ср}}(\omega) = \int_0 P(t,\omega)\,\frac{1}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt. \tag{13}$$

Независимость $P_{\text{ср}}$ от времени связана с тем, что к моменту $t \gg \tau$ устанавливается стационарный режим взаимодействия излучения с системой частиц.

Подставляя (12) в (13) и полагая $\omega_1 = \omega_0$, находим

$$P_{\text{ср}}(\omega) = -\frac{\pi n e^2}{mc\tau}\frac{I(\omega)}{\lambda^2+\Delta\omega^2}\left\{\frac{\Delta\omega^2-\lambda\left(\lambda-\frac{1}{\tau}\right)}{\Delta\omega^2+\left(\lambda-\frac{1}{\tau}\right)^2} + \frac{\Delta\omega^2-\lambda\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Delta\omega^2+\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)^2}\right\}. \tag{14}$$

Если $I(\omega)$ отлична от нуля в окрестности частоты $\omega_0$, то на этой частоте возникает индуцированное излучение, поскольку $P_{\text{ср}}(\omega_0) > 0$.

Рассмотрим теперь другой крайний случай $\tau \gg \frac{1}{\lambda}$, когда движение частиц фактически определяется только их взаимодействием с внешними полями, а столкновениями можно пренебречь. Средняя мощность, излучаемая системой за время $T \gg \frac{1}{\lambda}$ в элемент телесного угла $dO$, определяется тогда соотношением

$$P(T) = \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^\infty P(t, \omega)\, dt d\omega = -\frac{2\pi n e^2}{mc}\frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^\infty d\omega \frac{I(\omega)}{\lambda^2 + \Delta\omega^2} \times$$

$$\times [\Delta\omega \operatorname{ch}\lambda t \sin\Delta\omega t + \lambda \operatorname{sh}\lambda t \cos\Delta\omega t] \qquad (15)$$

(при условии точного параметрического резонанса $\omega_1 = \omega_0$).

Пусть спектральная интенсивность падающей электромагнитной волны равна

$$I(\omega) = \frac{u_0}{(\omega - \Omega)^2 + \nu^2}.$$

Тогда результат интегрирования по $\omega$ существенным образом будет зависеть от соотношения между шириной спектрального распределения $\nu$ и величиной $\lambda$. Рассмотрим два предельных случая возбуждения системы волной с «узким» и «широким» спектрами.

В первом случае $\nu \ll \lambda$, т. е. спектр возбуждения расположен в узкой (по сравнению с $\lambda$) области вблизи частоты $\Omega$. При этом

$$P_{\text{ср}}(T) = \frac{2\pi n e^2}{mc}\frac{1}{T}\frac{1}{(\Delta\omega_p^2 + \lambda^2)^2}\int_0^\infty [(\Delta\omega^2 - \lambda^2)(\operatorname{ch}\lambda T \cos\Delta\omega T - 1) -$$

$$- 2\lambda\Delta\omega \operatorname{sh}\lambda T \sin\Delta\omega T]\, I(\omega)\, d\omega = \frac{2\pi^2 n e^2}{mc}\frac{1}{T\nu}\frac{u_0}{(\Delta\omega_p^2 + \lambda^2)^2} \times$$

$$\times \{(\Delta\omega_p^2 - \lambda^2)(\operatorname{ch}\lambda T \cos\Delta\omega_p T e^{\;T\nu} - 1) - 2\lambda\Delta\omega_p \operatorname{sh}\lambda T \sin\Delta\omega_p T e^{-T\nu}\}, \qquad (16)$$

где $\Delta\omega_p = \Omega - \omega_0$.

Из (16) видно, что при резонансном возбуждении ($\Delta\omega_p = 0$) наблюдается поглощение, мощность которого увеличивается как $\frac{1}{T}\exp[(\lambda - \nu)T]$. При нерезонансном возбуждении ($\Delta\omega_p \neq 0$) индуцированное поглощение периодически (с периодом $2\pi/\Delta\omega_p$) сменяется индуцированным излучением. Величина излучаемой и поглощаемой мощности растет как $_{T}\,\exp[(\lambda - \nu)T]$.

В случае возбуждения широким спектром $\nu \gg \lambda$ величину $I(\omega)$ можно считать постоянной в окрестности частоты $\omega_0$, и $P_{\text{ср}}$ будет иметь вид:

$$P_{\text{ср}} = \frac{2\pi n e^2}{mc}\frac{1}{T} I(\omega_0)\int_0^\infty \frac{1}{(\Delta\omega^2 + \lambda^2)^2}[(\Delta\omega^2 - \lambda^2)(\operatorname{ch}\lambda T \cos\Delta\omega T - 1) -$$

$$- 2\lambda\Delta\omega \operatorname{sh}\lambda T \sin\Delta\omega T]\, d\omega = -\frac{2\pi^2 n e^2}{mc\lambda} e^{-\lambda T}(\operatorname{ch}\lambda T + \operatorname{sh}\lambda T)\, I(\omega_0). \qquad (17)$$

Отсюда следует, что при возбуждении широким спектром имеет место только индуцированное поглощение. При $\lambda T \gg 1$ поглощаемая мощность не зависит от времени:

$$P_{\text{ср}} = -\frac{2\pi^2 n e^2}{mc\lambda} I(\omega_0).$$

Рассмотрим вынужденные радиационные процессы в том случае, когда частота $\omega_1$ лежит вне области неустойчивости (11). Тогда $\lambda = i\delta$ $(\delta^2 = \Delta\lambda^2 - \lambda_1^2 > 0)$, а частица будет двигаться в конечной области. Подставляя (8) в (13), найдем среднее значение мощности индуцированного излучения в интервале частот $d\omega$ в элемент угла $dO$:

$$P_{\text{ср}} = \frac{\pi n e^2 \Omega_2}{mc\omega_1 \delta\tau} \left[ \frac{\Delta\lambda - \delta}{(\Delta\omega - \delta)^2 + \frac{1}{\tau^2}} - \frac{\Delta\lambda + \delta}{(\Delta\omega + \delta)^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right] I(\omega). \qquad (18)$$

Исследуем более подробно полученное выражение при $\omega_1 > \omega_0 \sqrt{1 + h + \frac{h^2}{2}}$. В этом случае $\Delta\lambda > 0$, а поскольку всегда $|\Delta\lambda| > \delta$, то первое слагаемое в (18) положительно, а второе — отрицательно. Для реализации условия возникновения индуцированного излучения $(P_{\text{ср}} > 0)$ спектр внешнего излучения должен быть сосредоточен в интервале частот, близких к $2\ (\omega_0 + \omega_1) + \delta$. При этом первое слагаемое в (18) будет давать основной вклад, если $\frac{1}{\tau}$, $\delta$ и ширина спектра $\nu$ удовлетворяют неравенствам $\delta \gg \frac{1}{\tau}$, $\delta \gg \nu$.

Обсудим, для каких частиц может быть реализован рассмотренный выше механизм вынужденного излучения на СВЧ частотах. Радиотехнические методы позволяют получить переменное поле частоты $10^6$—$10^7$ *гц*. Учитывая, что для ионов массы $m$ циклотронная частота $\omega_0 = \frac{m_0}{m} 10^4 H$ *эрст* ($m_0$ — масса протона), получим возможные значения ведущего поля $H = \frac{m}{m_0}(10^2$—$10^3)$ *эрст*. Поскольку в реальных условиях $H \leqslant 10^4$ *эрст*, то в качестве рабочего вещества для рассмотренного генератора индуцированного излучения могут быть использованы однозарядные ионы с массами $m \sim (1 \div 100)\, m_0$.

В заключение авторы благодарят участников семинара А. А. Соколова за обсуждение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Schneider J. Phys. Rev., Lett., 2, 504, 1959.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, 166, 1332, 1966.
3. Гапонов А. В., Юлпатов В. К. «Радиотехника и электроника», 7, 631, 1962.
4. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. «Изв. вузов», радиофизика, 10, 1414, 1967.
5. Собельман И. И., Тютин И. В. «Успехи физических наук», 79, 596, 1963.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
7. Капица П. Л. «Успехи физических наук», 78, 181, 1962.
8. Борн М. Оптика ГНТИУ, 1937, стр. 582.

Поступила в редакцию
1.9 1970 г.

Кафедра
теоретической физики