Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1971

УДК 621.373

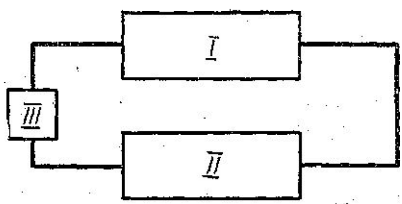
О. В. СНИГИРЕВ, Ю. М. АЗЬЯН

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ОДНОГО КЛАССА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Показано, что для исследования устойчивости стационарных процессов автоколебательной системы, состоящей из усилителя, замкнутого широкополосной цепью обратной связи с нелинейной фазовой характеристикой, может быть применен метод Хилла [1].

Среди автоколебательных систем можно выделить определенный класс устройств, цепь обратной связи которых широкополосна и сдвиг фазы сигнала в ней является нелинейной функцией частоты сигнала.

В настоящее время имеются лишь отрывочные сведения о свойствах таких устройств. В основном это объясняется тем, что процессы в этих системах описываются интегральными уравнениями, теоретический анализ которых связан с существенными математическими т[illegible]дностями. Экспериментальное исследование, которое само по себе осложнено многочастотностью систем, не может дать полной картины физических процессов.




Блок-схема автоколебательной системы. *I* — усилитель сигналов, *II* — цепь обратной связи, *III* — блок внешних воздействий

Известно [2], что в таких си- [illegible] в з ж ягк в збуждение набора колебательных компонентов с неэквидистантным спектром. Там же показано, что переходный процесс заканчивается установлением периодического колебания с частотой, близкой к одной из частот возбуждения.

Представляет интерес исследовать устойчивость стационарных процессов в таких системах. Вообще говоря, малое возмущение при данных значениях параметров системы либо не изменит существующего состояния, либо приведет к возбуждению другой колебательной компоненты. Во втором случае в системе возникнут сложные колебания.

В настоящей работе предлагается метод теоретического исследования устойчивости стационарных процессов данного класса автоколебательных систем, блок-схему которых можно представить в виде, изображенном на рисунке.

## Основные уравнения

Для изображенной на рисунке системы получено уравнение [2], которое можно записать в виде

$$u(t)=\int_0^t h(t-\tau)F[u(\tau)]\,d\tau+\varphi_0(t)\quad(0<t<\infty).\qquad(1)$$

Здесь $u(t)$ — напряжение в системе, $F[u(t)]$ — характеристика усилителя, связывающая входной и выходной сигналы элемента (I), $h(t)$ — импульсная реакция элемента (II), $\varphi_0(t)$ — внешнее воздействие на систему.

Если вместо $F[u(t)]$ использовать $F^{-1}[u(t)]$, задающую входной сигнал усилителя как функцию выходного, то уравнение (1) преобразуется в эквивалентное ему уравнение:

$$F^{-1}[u(t)]=\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau+\varphi_0(t)\quad(0<t<\infty).\qquad(2)$$

Запись основного уравнения в виде (2) предпочтительнее, так как полиноминальная аппроксимация $F^{-1}[u(t)]$ даже при учете первых двух или трех членов в очень широких пределах изменения $u(t)$ близка к реальным характеристикам усилителя.

Так как $F$, $h$ и $\varphi_0$ удовлетворяют всем требованиям теоремы существования и единственности решения нелинейного уравнения Вольтерра [3], то уравнение (2) имеет одно и только одно решение в классе $L_2$ интегрируемых с квадратом функций.

Пусть $F$, $h$ и $\varphi_0$ таковы, что решение $u(t)$ уравнения (2) при $t\to\infty$ будет периодической функцией $u_0$ периода $T$, удовлетворяющей уравнению стационарности

$$F^{-1}[u_0(t)]=\int_{-\infty}^t h(t-\tau)u_0(\tau)\,d\tau\quad(0<t<+\infty).\qquad(3)$$

В некоторый момент времени $t_0$ в системе возникает малое возмущение $\varphi_\delta(t)$, такое, что

$$\|\varphi_\delta(t)\|^2=\int_0^\infty\varphi_\delta^2(t)\,dt<\delta^2,$$

огд для $u_\delta(t)=u_0(t)+\xi(')$, где $\xi\,'t)$ — малое о клон ни ; с о ент $t_0\equiv 0$ будет справедливо уравнение

$$F^{-1}[u_\delta(t)]=\int_0^t h(t-\tau)u_\delta(\tau)\,d\tau+\varphi_\delta(t)\quad(0<t<\infty).\qquad(4)$$

Будем считать, что данный стационарный процесс $u_0(t)$ устойчив, если $u_\delta(t)\to u_0(t)$ при $\delta\to 0$, где $u_\delta(t)$ есть решение уравнения (4).

Рассмотрим уравнение для малых отклонений $u_\delta(t)-u_0(t)=\xi(t)$. Линеаризируя уравнение (4), получаем

$$\dot F^{-1}[u_0(t)]\,\xi(t)=\int_0^t h(t-\tau)\xi(\tau)\,d\tau+\varphi_\delta(t)(0<t<\infty).\qquad(5)$$

Уравнение (5) представляет собой линейное интегральное уравнение типа Вольтерра с периодическим коэффициентом $\dot F^{-1}[u_0(t)]$.

Поскольку $\dot{F}^{-1}[u_0(t)]$ зависит от параметров системы, то, получив зависимость решения $\xi(t)$ уравнения (5) от них, можно найти в пространстве параметров область устойчивых стационарных процессов.

## Анализ характера решений

Преобразуем по Лапласу уравнение (5), предварительно разложив $\dot{F}^{-1}[u_0(t)]$ как сложную периодическую функцию аргумента $t$ в ряд Фурье

$$\dot{F}^{-1}[u_0(t)] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_q e^{-q \cdot i\omega t}, \tag{6}$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Тогда для изображения $f(p)$ функции $\xi(t)$ получим разностное уравнение, содержащее бесконечное число членов:

$$\sum_{\substack{q=-\infty \\ q\neq 0}}^{\infty} c_q f(p+qi\omega) + [c_0 - H(p)] f(p) = \Delta(p). \tag{7}$$

Здесь $H(p)$ — изображение $h(t)$, а $\Delta(p)$ — изображение $\varphi\delta(t)$.

Впервые уравнения типа (6) исследовал Хилл [1]. Образуем из уравнения (6) бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно $f(p+k \cdot i\omega)$; $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Для этого разделим члены уравнения (6) на $-k^2$ и придадим $p$ смещение $ki\omega$. Такого рода процедуры с успехом применялись для решения уравнений типа Матье Айнсом [4] и для исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами Валеевым [5].

Решение уравнения (6) из полученной алгебраической системы записывается по формулам Крамера:

$$f(p) = \frac{1}{D(p)} \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & -[c_0 - H(p+i\omega)] - \Delta(p+i\omega) & -c_2 & \cdots \\ \cdots & c_1 & \Delta(p) & c_{-1} \cdots \\ \cdots & -c_2 - \Delta(p-i\omega) & -[c_0 - H(p-i\omega)] & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{8}$$

Здесь $D(p)$ — бесконечный определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных $f(p+ki\omega)$

$$D(p) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & -[c_0 - H(p+i\omega)] & -c_{-1} & \cdots \\ \cdots & c_1 & [c_0 - H(p)] & c_{-1} \cdots \\ \cdots & \cdots & -c_1 & -[c_0 - H(p-i\omega)] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{9}$$

Из требования существования у решения уравнения (1) предельного цикла $u_0(t)$ с необходимостью вытекает, что $h(t)$ при $t \to \infty$ ведет себя как $1/t^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$. Следовательно, $H(p)$ определена в области $Re(p) > 0$ [6].

Так как в области определения $H(p)$ выполнены все требования сходимости бесконечного определителя [7], то $D(p)$ является целой периодической функцией комплексного переменного $p$ в области $Re(p)>0$; свойство периодичности $D(p)$ следует из того, что $D(p+i\omega)$ будет отличаться от $D(p)$ лишь сдвигом центральной строки вниз на одно место, а

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[c_0 - H(p+(k+1)\,i\omega)]}{[c_0 - H(p+ki\omega)]} = 1. \tag{10}$$

Из сказанного следует, что изображение $f(p)$ будет иметь полосы в точках $p_{nk}=p_n+i\omega$, если в точке $p_n$ — нуль определителя (8). Кроме того, определитель (7) отличается от определителя (8) лишь заменой центрального столбца столбцом из изображений $\Delta(p)$ и не имеет полюсов в полуплоскости $Re(p)>0$, так как из того, что $\|\varphi_\delta(t)\|<\delta$ следует, что $\Delta(p)$ является целой функцией $p$ в полуплоскости $Re(p)>0$.

Следовательно, все полюсы $f(p)$ расположены в точках $p_{nk}$, определяемых из уравнения $D(p)=0$.

Из второй теоремы разложения [6] следует, что

$$\xi(t) = \sum_{p_n k} \operatorname*{res}_{p_n k} f(p)\, e^{pt}, \tag{11}$$

и если $D(p)$ имеет хотя бы один нуль в области $Re(p)>0$, то стационарный процесс $u_0(t)$ будет неустойчивым, поскольку $u_\delta(t)$ не стремится к $u_0(t)$, хотя $\delta\to 0$.

Таким образом, для нахождения в пространстве параметров системы области устойчивости периодических стационарных процессов достаточно найти $p_n$ как функции этих параметров из уравнения $D(p)=0$.

Так как $D(p)$ является сходящимся бесконечным определителем, то его можно представить в виде сходящейся последовательности определителей 3, 5, 7... порядка, составленных из элементов, окружающих центральный элемент $[c_0 - H(p)]$.

В дальнейшем будет показано, что изложенный метод может быть применен к конкретным автоколебательным системам данного класса.

Авторы благодарят В. В. Мигулина за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Hill G. W. Acta Math., 8, 1—36, 1886.
2. Азьян Ю. М., Мигулин В. В. «Радиотехника и электроника», 1, вып. 4, 1956.
3. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., ИЛ, 1960.
4. Стретт М. Д. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков, ОНТИ, 1935.
5. Валеев К. Г. «Прикладная математика и механика», 26, вып. 4, 1962.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. Б. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
7. Уитткер Е. Т., Ватсон Г. И. Курс современного анализа. т. 1. ГТТИ, 1933.


Поступила в редакцию
1.9 1970 г.

Кафедра
физики колебаний