

П. С. ЛАНДА, М. В. ПЕНТЕГОВА, С. П. СТРЕЛКОВ

## ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ И ПОЛОЖЕНИЯ БАЛАНСИРУЮЩЕГО ГРУЗА НА КРИТИЧЕСКУЮ СКОРОСТЬ ФЛАТТЕРА

Исследуется влияние собственного момента инерции балансирующего груза, расположенного на конце крыла, на величину критической скорости флаттера. Показано, что зависимость критической скорости от собственного радиуса инерции груза  $r$  при постоянной массе не является монотонной с увеличением  $r$ , критическая скорость вначале растет, а затем начинает падать. Максимальное значение критической скорости монотонно увеличивается с ростом  $r$ . Рассмотрен также случай, когда балансирующий груз расположен на расстоянии  $0,7l$  от корня крыла.

В работе [1] исследовалось влияние балансирующего груза на величину критической скорости изгибно-крутильного флаттера однородного крыла. Балансирующий груз предполагался в виде точечной сосредоточенной массы, помещенной на конце крыла впереди его передней кромки. Было показано, что при фиксированном положении балансирующего груза с ростом его массы критическая скорость вначале увеличивается, а затем медленно начинает падать. Максимальное значение критической скорости тем больше, чем больше расстояние от балансира до оси жесткости.

В настоящей работе выявлено влияние собственных размеров балансирующего груза и его расположения на крыле. Уравнения изгибно-крутильных колебаний однородного крыла с большим удлинением имеют вид [2]:

$$\begin{aligned}
 EI \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} + m \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \rho V^2 t \left[ \theta + \frac{t}{V} \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \times \right. \\
 \left. \times \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{V} \frac{\partial Z}{\partial \tau} \right] = 0, \\
 -GI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - m\sigma \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau^2} + I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial C_{mE}}{\partial \alpha} \rho V^2 t^2 \times \\
 \times \left[ \theta + \frac{t}{V} \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16 \partial C_{mE} / \partial \alpha} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{V} \frac{\partial Z}{\partial \tau} \right] = 0. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Обозначения здесь соответствуют [1, 2].

Если балансирующий груз массы  $M$  с моментом инерции относительно оси, проходящей через центр масс,  $J_0$  укреплен на расстоянии  $\sigma_1$

от оси жесткости крыла (вперед ее) в сечении с координатой  $J_0$ , то в точке  $y_0$  будет разрыв третьей производной прогиба (перерезывающей силы) и первой производной угла закручивания (закрутящего момента):

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}(\tau, y_0 - 0) - EI \frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}(\tau, y_0 + 0) &= \\ &= M \left[ \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau^2}(\tau, y_0) + \sigma_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}(\tau, y_0) \right], \\ GI_p \frac{\partial \theta}{\partial y}(\tau, y_0 - 0) - GI_p \frac{\partial \theta}{\partial y}(\tau, y_0 + 0) &= \\ &= -M \sigma_1 \left[ \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau^2}(\tau, y_0) + \sigma_1 \left( 1 + \frac{r^2}{\sigma_1^2} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}(\tau, y_0) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $r^2 = J_0/M$  — радиус инерции балансирующего пружа. В частности, если балансир расположен на конце крыла ( $y_0 = l$ ), условия разрыва (2) являются граничными условиями.

Крыло будем считать консольно-закрепленным, так что

$$Z(\tau, 0) = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y}(\tau, 0) = 0, \quad \theta(\tau, 0) = 0. \quad (3)$$

Решение задачи проводилось тем же методом и для тех же параметров крыла, что и в работе [1].

Рассмотрим вначале влияние собственного радиуса инерции балансирующего пружа, расположенного на конце крыла. Комплексный характеристический детерминант, из условия равенства нулю которого можно определить два параметра балансирующего пружа при фиксированном третьем, имеет вид

$$D = \det \| a_{ik} \|, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_{1k} &= z_k''(1), \quad a_{2k} = z_k'''(1) - \mu \tilde{\omega}^2 \eta^2 (Z_k(1) + \tilde{\sigma}_1 \vartheta_k(1)), \\ a_{3k} &= \vartheta_k'(1) + \mu \tilde{\omega}^2 \frac{\tilde{\sigma}_1}{r_0^2} \left[ z_k(1) + \tilde{\sigma}_1 \left( 1 + \frac{\tilde{r}^2}{\sigma_1^2} \right) \vartheta_k(1) \right]. \end{aligned}$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по безразмерной координате  $\xi = y/l$ ,  $k$  — номер частного решения,

$$z(\xi) = \frac{Z(\tau, \xi)}{t} e^{-i\omega\tau}, \quad \vartheta(\xi) = \theta(\tau, \xi) e^{-i\omega\tau}, \quad \mu = \frac{M}{ml},$$

$$\tilde{\omega} = \omega l \left( \frac{I_m}{GI_p} \right)^{1/2}, \quad \eta = l \left( \frac{mGI_p}{I_m EI} \right)^{1/2}, \quad \tilde{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{t},$$

$$r_0^2 = \frac{I_m}{mt^2}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{t}.$$

Решая уравнение  $D=0$ , можно построить различные семейства кривых, характеризующих зависимость параметров балансира  $\mu$ ,  $\tilde{\sigma}_1$  и  $\tilde{r}$  от безразмерной критической скорости  $W = \frac{2l}{t} \left( \frac{I_m}{GI_p} \right)^{1/2} V$  и частоты флаттера  $\tilde{\omega}$ .

Вначале были построены семейства зависимостей массы балансирующего пружа  $\mu$  и его «плеча»  $\tilde{\sigma}_1$  от частоты флаттера  $\tilde{\omega}$  при различ-

ных фиксированных значениях критической скорости  $\omega$  и радиусах инерции  $\tilde{r}=0$  и  $\tilde{r}=0,45$ .

Анализ этих зависимостей показал, что для обеспечения заданной критической скорости флаттера требуется тем большая масса балансира, чем меньше его «плечо». Однако, сколько бы мы ни увеличивали массу, не при всяком значении «плеча»  $\tilde{\sigma}_1$  можно получить заданную критическую скорость. Для каждого фиксированного значения критической скорости существует свое минимальное значение «плеча»  $\tilde{\sigma}_1$ , при котором эта скорость может быть достигнута. Причем это минимальное значение  $\tilde{\sigma}_{1\min}$  уменьшается с ростом собственного радиуса инерции балансира. Этот вывод находится в противоречии с тем, что следовало бы ожидать, исходя из модели «эквивалентной» колебательной системы с двумя степенями свободы, к которой сводится крыло при расчете по методу Бубнова — Галеркина.

Чтобы исследовать, как меняется критическая скорость флаттера при изменении собственного радиуса инерции балансира, нами были построены зависимости  $\tilde{r}^2$  и  $\mu$  от частоты флаттера  $\tilde{\omega}$  при фиксированных значениях  $W$  и  $\tilde{\sigma}_1=0,355$ . На основании этих кривых были построены графики зависимостей  $\mu$  от  $\tilde{r}^2$  при фиксированных значениях  $W$ , из которых было видно, что для каждого значения  $\tilde{r}^2$ , начиная с некоторого минимального, имеется либо одно, либо два, либо три значения  $\mu$ , соответствующих одному и тому же значению критической скорости флаттера. Минимальное значение  $\tilde{r}_{\min}^2$ , при котором может быть достигнута заданная критическая скорость, тем больше, чем больше величина этой скорости.

Все полученные результаты становятся более наглядными, если построить кривые зависимостей критической скорости флаттера  $W$  от массы балансира  $\mu$  при выбранных постоянных значениях «плеча»  $\tilde{\sigma}_1$  и собственного радиуса инерции  $\tilde{r}$ . Примеры таких кривых представлены на рис. 1. Здесь же приведены зависимости частоты флаттера  $\tilde{\omega}$  от массы  $\mu$ .

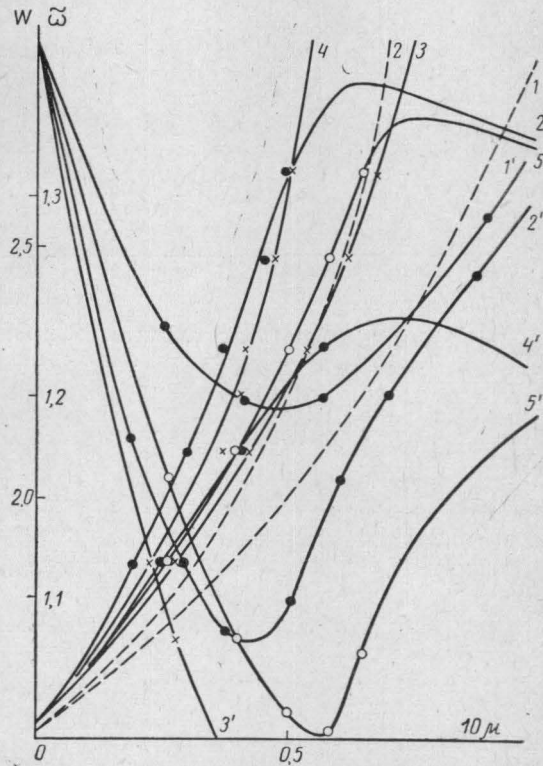


Рис. 1. Зависимость критической скорости (кривые 1—5) и частоты флаттера (кривые 1'—5') от массы балансира при  $\xi_0=1$ : 1 и 1' —  $\tilde{\sigma}_1=0,355$ ,  $\tilde{r}^2=0$ ; 2 и 2' —  $\tilde{\sigma}_1=0,500$ ,  $\tilde{r}^2=0$ ; 3 и 3' —  $\tilde{\sigma}_1=0,355$ ,  $\tilde{r}^2=0,2$ ; 4 и 4' —  $\tilde{\sigma}_1=0,500$ ,  $\tilde{r}^2=0,2$ ; 5 и 5' —  $\tilde{\sigma}_1=0,355$ ,  $\tilde{r}^2=0,1$ . Пунктир — прямые вычисленные по методу Бубнова — Галеркина

Из этих кривых видно, что вначале с ростом массы балансира  $\mu$  критическая скорость флаттера растет, а затем, достигая максимума, очень медленно начинает падать. Максимальное значение критической скорости, которое может быть достигнуто при данном «плече»  $\tilde{\sigma}_1$ , тем

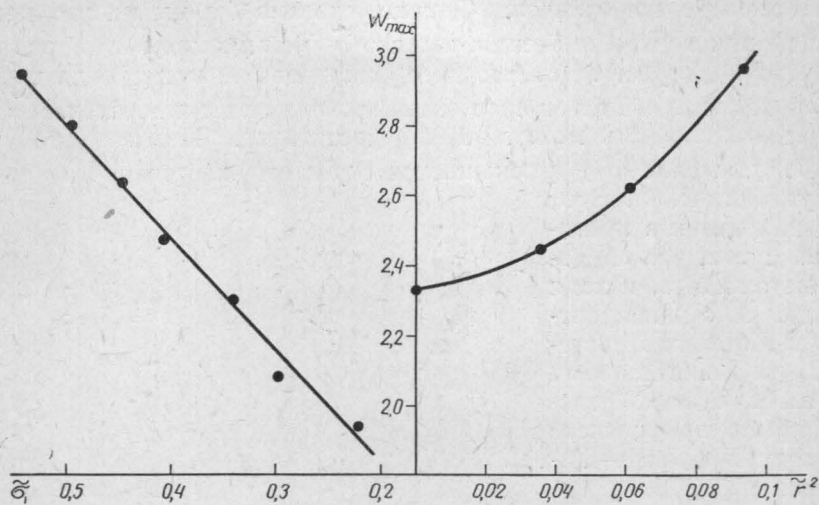


Рис. 2. Зависимость максимального значения критической скорости от  $\tilde{r}^2$  и от  $\tilde{\sigma}_1$

больше, чем длиннее «плечо» и чем больше собственный радиус инерции  $\tilde{r}$ .

Зависимость максимального значения критической скорости от  $\tilde{r}^2$  при  $\tilde{\sigma}_1 = 0,355$  представлена на рис. 2. Ее можно аппроксимировать формулой

$$w_{max}(\tilde{r}^2) = w_{max}(0) (1 + \alpha \tilde{r}^4),$$

где  $\alpha = 29,25$ .

На этом же графике представлена зависимость максимального значения критической скорости флаттера от  $\tilde{\sigma}_1$  при  $\tilde{r}^2 = 0$ .

Представляют интерес также кривые, показанные на рис. 3, из которых следует, что при фиксированных значениях массы балансира  $\mu$  и его «плеча»  $\tilde{\sigma}_1$  ( $\tilde{\sigma}_1 = 0,355$ ) существует оптимальный радиус инерции, при котором может быть достигнута наибольшая критическая скорость.

Рассмотрим случай, когда балансирующий груз расположен в точке  $y_0 \neq l$ . Эта задача может быть решена

двумя способами, отличающимися друг от друга степенью вычислительных трудностей.

Первый способ заключается в следующем. Положим в уравнениях (1)

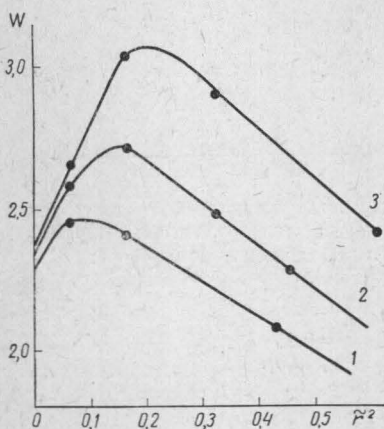


Рис. 3. Зависимость критической скорости от  $\tilde{r}^2$  при фиксированных значениях  $\mu$  и  $\tilde{\sigma}_1$

$$z(\xi) = u(\xi) + v(\xi), \quad \vartheta(\xi) = \psi(\xi) + \chi(\xi), \quad (5)$$

причем будем считать, что функции  $v(\xi)$  и  $\chi(\xi)$  тождественно равны нулю при  $\xi < \xi_0$ . В силу линейности уравнений (1) и выполнения принципа суперпозиции комбинации функции  $u(\xi)$  и  $\psi(\xi)$ ,  $v(\xi)$  и  $\chi(\xi)$  должны удовлетворять одной и той же системе уравнений (1).

Из граничных условий для консольно-закрепленного крыла следует:

$$u(0) = u'(0) = \psi(0) = 0, \\ u''(1) + v''(1) = 0, \quad u'''(1) + v'''(1) = 0, \quad \psi'(1) + \chi'(1) = 0. \quad (6)$$

Разбиение на функции  $u(\xi)$  и  $v(\xi)$ ,  $\psi(\xi)$  и  $\chi(\xi)$  производим так, чтобы  $u'''(\xi)$  и  $\psi'(\xi)$  были непрерывны в точке, где находится балансир, т. е. при  $\xi = \xi_0$ . Тогда из (2) для функций  $v(\xi)$  и  $\chi(\xi)$  получаем следующие граничные условия в точке  $\xi = \xi_0$ :

$$v(\xi_0) = v'(\xi_0) = v''(\xi_0) = \chi(\xi_0) = 0, \\ v'''(\xi_0) = \mu \tilde{\omega}^2 \eta^2 [u(\xi_0) + \tilde{\sigma}_1 \psi(\xi_0)], \\ \chi'(\xi_0) = -\mu \frac{\tilde{\sigma}_1}{r_0^2} \tilde{\omega}_2 \left[ u(\xi_0) + \tilde{\sigma}_1 \left( 1 + \frac{\tilde{r}_2}{\tilde{\sigma}_1} \right) \psi(\xi_0) \right]. \quad (7)$$

Таким образом, если бы нам были известны значения функций  $u(\xi_0)$  и  $\psi(\xi_0)$ , то задача нахождения функций  $v(\xi)$  и  $\chi(\xi)$  была бы полностью определена (задача типа Коши).

Функции  $u(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  нам не известны, но их можно выразить через фундаментальную систему частных решений, как это делалось ранее, т. е. положить

$$u(\xi) = C_1 u_1(\xi) + C_2 u_2(\xi) + C_3 u_3(\xi), \\ \psi(\xi) = C_1 \psi_1(\xi) + C_2 \psi_2(\xi) + C_3 \psi_3(\xi). \quad (8)$$

Запишем функции  $v(\xi)$  и  $\chi(\xi)$  также в виде комбинации двух частных решений

$$v(\xi) = B_1 v_1(\xi) + B_2 v_2(\xi), \quad (9)$$

$$\chi(\xi) = B_1 \chi_1(\xi) + B_2 \chi_2(\xi) \quad \text{при } \xi \geq \xi_0.$$

Начальные условия для этих частных решений выбираем следующими:

$$v_1(\xi_0) = v_1'(\xi_0) = v_1''(\xi_0) = \chi_1(\xi_0) = \chi_1'(\xi_0) = 0, \quad v_1'''(\xi_0) = 1, \\ v_2(\xi_0) = v_2'(\xi_0) = v_2''(\xi_0) = v_2'''(\xi_0) = \chi_2(\xi_0) = 0, \quad \chi_2'(\xi_0) = 1.$$

Тогда из (7) следует:

$$B_1 = \mu \tilde{\omega}^2 \eta^2 [u(\xi_0) + \tilde{\sigma}_1 \psi(\xi_0)], \\ B_2 = -\mu \frac{\tilde{\sigma}_1}{r_0^2} \tilde{\omega}_2 \left[ u(\xi_0) + \tilde{\sigma}_1 \left( 1 + \frac{\tilde{r}_2}{\tilde{\sigma}_1} \right) \psi(\xi_0) \right]. \quad (10)$$

Подставляя (8) и (9) с учетом (10) в (6), получаем систему однородных уравнений относительно неизвестных постоянных  $C_1, C_2, C_3$ :

$$\sum_{i=1}^3 C_i u_i''(1) + \mu \tilde{\omega}^2 \eta^2 \left\{ \sum_{i=1}^3 C_i [u_i(\xi_0) + \tilde{\sigma}_1 \psi_i(\xi_0)] \right\} v_1'(1) - \mu \frac{\tilde{\sigma}_1}{r_0^2} \tilde{\omega}^2 \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^3 C_i \left[ u_i(\xi_0) + \tilde{\sigma}_1 \left( 1 + \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{\sigma}_1^2} \right) \psi_i(\xi_0) \right] \right\} v_2''(1) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 C_i u_i''(1) + \mu \tilde{\omega}^2 \eta^2 \left\{ \sum_{i=1}^3 C_i [u_i(\xi_0) + \tilde{\sigma}_1 \psi_i(\xi_0)] \right\} v_1''(1) - \mu \frac{\tilde{\sigma}_1}{r_0^2} \tilde{\omega}^2 \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^3 C_i \left[ u_i(\xi_0) + \tilde{\sigma}_1 \left( 1 + \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{\sigma}_1^2} \right) \psi_i(\xi_0) \right] \right\} v_2''(1) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 C_i \psi_i'(1) + \mu \tilde{\omega}^2 \eta^2 \left\{ \sum_{i=1}^3 C_i [u_i(\xi_0) + \tilde{\sigma}_1 \psi_i(\xi_0)] \right\} \chi_1'(1) - \mu \frac{\tilde{\sigma}_1}{r_0^2} \tilde{\omega}^2 \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^3 C_i \left[ u_i(\xi_0) + \tilde{\sigma}_1 \left( 1 + \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{\sigma}_1^2} \right) \psi_i(\xi_0) \right] \right\} \chi_2'(1) = 0.$$

Условие равенства нулю комплексного детерминанта этой системы уравнений  $D(\mu, \tilde{\sigma}_1, \tilde{r}^2) = 0$  как раз и определяет два неизвестных параметра балансирующего груза при фиксированном третьем.

Таким образом, при изложенном способе решения задача сводится к получению на моделирующей установке обычной фундаментальной системы трех частных решений для функций  $u(\xi)$ ,  $\psi(\xi)$  (значения этих частных решений требуются в двух точках  $\xi = \xi_0$  и  $\xi = 1$ ) и двух дополнительных частных решений для функций  $v(\xi)$ ,  $\chi(\xi)$ .

(По существу эти дополнительные частные решения в точке  $\xi = 1$  представляют собой значения второго и третьего фундаментального частного решения в точке  $\xi = 1 - \xi_0$ ). На основе этих частных решений вычисляется комплексный детерминант третьего порядка и определяются необходимые параметры балансира.

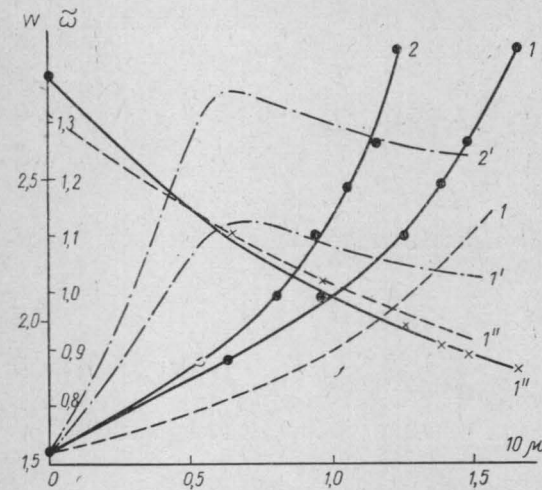


Рис. 4. Зависимость критической скорости (кривые 1 и 1', 2 и 2') и частоты (кривая 1'') от массы балансира при  $\tilde{r} = 0$ . 1 и 1'' —  $\tilde{\sigma}_1 = 0,355$ ,  $\xi_0 = 0,7$ ; 2 —  $\tilde{\sigma}_1 = 0,500$ ,  $\xi_0 = 0,7$ ; 1' —  $\tilde{\sigma}_1 = 0,355$ ,  $\xi_0 = 1$ ; 2' —  $\tilde{\sigma}_1 = 0,500$ ,  $\xi_0 = 1$ . Пунктиром показаны результаты расчета по методу Бубнова — Галеркина

Второй возможный способ решения основан на сшивании решений в точке  $\xi_0$ . Он является более непосредственным, но зато приводит к необходимости вычисления комплексных детерминантов шестого поряд-

ка, что связано со значительными трудностями вычислительного характера. Поэтому мы проводили решение первым способом.

Вначале были построены семейства зависимостей массы балансирующего груза и его «плеча» от частоты флаттера  $\omega$  при фиксированных значениях критической скорости  $W$  и  $r=0$ ,  $\xi_0=0,7$ . По этим кривым определены зависимости критической скорости и частоты флаттера  $\omega$  и  $\omega$  от массы балансира при фиксированных значениях «плеча»  $\sigma_1$  (рис. 4). Для сравнения на этом же рисунке приведены соответствующие зависимости для случая, когда балансирующий груз расположен на конце крыла. Сравнивая эти зависимости, видим, что положение балансирующего груза существенно влияет на их характер. При малых массах балансирующего груза его эффективность оказывается более значительной, если он расположен на конце крыла. Однако с ростом массы балансира расположенного в точке  $\xi_0=0,7$ , критическая скорость флаттера в рассмотренной нами области монотонно растет. Тогда как в случае, когда балансир находится на конце крыла ( $\xi_0=1$ ), при  $\mu \geq 0,06$  критическая скорость флаттера начинает падать. При этом оказывается, что начиная с  $\mu \sim 0,12$  балансирующий груз, расположенный в точке  $\xi_0=0,7$  становится более эффективным.

В заключение заметим, что в рассматриваемой области при  $\xi_0=0,7$  результаты расчета критической скорости и частоты флаттера по методу Бубнова — Галеркина по характеру совпадают с полученными на машине.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ланда П. С., Стрелков С. П., Яковлева М. В. «Изв. вузов», радиофизика, 9, 1098, 1968.
2. Гроссман Е. П. Тр. ЦАГИ, вып. 284, 1937.

Поступила в редакцию  
8.6 1970 г.

Кафедра  
общей физики для мехмата