

В. А. ЗАГРЕБНОВ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФОНОНОВ В КВАНТОВОЙ ЖИДКОСТИ (HE₄)

Исследуется гамильтониан, описывающий систему взаимодействующих фононов (квантов звуковых возбуждений плотности) в жидкости. Показано, что приведение его к нормальной форме позволяет систематически учесть вклады от ангармонических членов любого порядка в свободную часть гамильтониана и во взаимодействие. На основе нормализованного гамильтониана рассмотрена дисперсия фононов в жидком He₄.

При исследовании элементарных возбуждений в жидком He₄ при нулевых [1, 2] и низких температурах [3, 4, 5] широко используется квантовая гидродинамика Ландау [6, 7]. Изучение первого звука в гелии приводит к новой формулировке (см. § 1), квантования коллективных движений классической сжимаемой жидкости, позволяющей легко перейти к представлению вторичного квантования (фононам) и применять хорошо известные методы временной [2] и температурной [3] теорий возмущений. При этом обычно в гамильтониане ограничиваются кубическим ангармонизмом во взаимодействии фононов [2—4], и лишь в [5] рассматриваются и четырехфононные взаимодействия (Халатников [7] рассматривал только многофононные процессы рассеяния).

В § 2 проводится анализ гамильтониана квантовой гидродинамики в акустическом приближении, построенного в § 1, и предлагается метод, позволяющий систематически учитывать вклады ангармонических членов высших порядков в диагональную часть гамильтониана и во взаимодействие. Установлено также, что при этом появляются недиагональные члены, соответствующие двухфононному взаимодействию, которое ранее не рассматривалось (см. [2—5]). На основе преобразованного таким методом гамильтониана с помощью теории возмущений Беляева [10, 11] в § 3 исследуется (в первом приближении) дисперсия спектра фононов в жидком He₄ ($T=0^\circ\text{K}$) [2, 7].

§ 1. При квантовании движений жидкости Ландау [6, 7] исходил из гидродинамического гамильтониана

$$H = \int d\vec{r} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \rho \vec{v} + \rho E(\rho) \right) = \int d\vec{r} \mathcal{H}(\vec{r}), \quad (1)$$

где $\rho(\vec{r})$, $\vec{v}(\vec{r})$ — локальные плотность и скорость, а $E(\rho)$ — удельная внутренняя энергия. Возбужденными состояниями системы (1) являют-

ся колебания плотности, т. е. звук. Квантование таких коллективных движений жидкости (т. е. построение акустического приближения квантовой гидродинамики), приводящее к представлению о фононах, можно провести более простым, чем метод Ландау (см. также замечание в [8]), каноническим способом. Для этого введем коллективные координаты локальной плотности и потенциала скорости $\varphi(\vec{r}) : \vec{v}(\vec{r}) = \text{grad}\varphi(\vec{r})$, которые являются канонически сопряженными $\delta L/\delta\varphi = \rho$, где

$$L = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}) \left\{ \partial_t \varphi - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 - E(\rho) \right\} \quad (\text{см. [7]}) \quad \text{и}$$

$$E(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{P - P_0}{\rho^2} d\rho + E_0, \quad (2)$$

ρ_0 и $P_0 = P(\rho_0)$ — равновесные значения плотности и давления, а $E_0 = E(\rho_0)$ — равновесное значение удельной внутренней энергии, которым в (1, 2) можно пренебречь, так как рассматриваются лишь отклонение системы от равновесного состояния. По тем же причинам плотность гамильтониана (1) представим в виде разложения по степеням $(\rho - \rho_0)$ [7]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_4 + \dots = & \left\{ \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi \rho_0 \vec{\nabla} \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 \right\} + \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi (\rho - \rho_0) \vec{\nabla} \varphi + \frac{1}{3!} \left(\frac{d}{d\rho} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^3 \right\} + \\ & + \left\{ \frac{1}{4!} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^4 \right\} + \dots, \quad (3) \end{aligned}$$

где параметр $c(\rho) = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^{1/2}$ есть скорость звука в классической жидкости. Квантование системы с плотностью гамильтониана (3) проводится теперь каноническим способом, т. е. объявляя коллективные координаты $\rho_1(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) - \rho_0$ и $\varphi(\vec{r})$ операторами, которые подчиняются перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\rho_1(\vec{r}) \rho_1(\vec{r}')] &= \frac{\hbar}{i} \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \\ [\rho_1(\vec{r}) \rho_1(\vec{r}')] &= 0, \quad [\varphi(\vec{r}) \varphi(\vec{r}')] = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Полевые операторы $\rho_1(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r})$ легко выражаются через бозе операторы рождения — уничтожения $a_{\vec{k}}^{\pm}$:

$$\begin{aligned} \rho_1(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar \rho_0 k}{2c_0} \right)^{1/2} (a_{-\vec{k}}^+ + a_{\vec{k}}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \\ \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} i \left(\frac{\hbar c_0}{2\rho_0 k} \right)^{1/2} (a_{-\vec{k}}^+ - a_{\vec{k}}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (a_{\vec{k}}^+ \equiv a_{\vec{k}}^{\dagger}), \quad (5) \end{aligned}$$

где V — объем системы, а $c_0 \equiv \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\rho_0}^{1/2}$. Пространство состояний строится из вакуума $|\Psi_0\rangle$ действием операторов рождения $a_{\vec{k}}^+$. В этом представлении оператор гамильтона

$$H_0 = \int \mathcal{H}_0(\vec{r}) d\vec{r} \quad (6)$$

описывает идеальную бозе-систему квазичастиц с линейным спектром возбуждений (фононы):

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} \hbar c_0 |\vec{k}| \left(a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right), \quad (7)$$

а остальные члены разложения (3) взаимодействие между ними:

$$H_1 = \sum_{n=3}^{\infty} \int \mathcal{H}_n(\vec{r}) d\vec{r} \equiv \sum_{n=3}^{\infty} H_n. \quad (8)$$

Член H_3 соответствует кубическому ангармонизму (3), т. е. трехфононным процессам взаимодействия:

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \left\{ \frac{1}{4} (\vec{k}_1 \vec{k}_3) \left(\frac{\hbar^3 c_0 k_2}{2\rho_0 k_1 k_3} \right)^{1/2} (a_{-\vec{k}_1}^+ - a_{\vec{k}_1}) \times \right. \\ \times (a_{-\vec{k}_2}^+ - a_{\vec{k}_2}) (a_{-\vec{k}_3}^+ - a_{\vec{k}_3}) + \frac{1}{3!} \left(\frac{d}{d\rho} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} \times \\ \left. \times \left(\frac{\hbar^3 \rho_0^3 k_1 k_2 k_3}{8c_0^3} \right)^{1/2} (a_{-\vec{k}_1}^+ + a_{\vec{k}_1}) (a_{-\vec{k}_2}^+ + a_{\vec{k}_2}) (a_{-\vec{k}_3}^+ + a_{\vec{k}_3}) \right\} \Delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3), \quad (9)$$

H_n описывает многофононные взаимодействия с четырьмя и более фононами в вершинах ($n \geq 4$):

$$H_n = \frac{1}{n!} V \sum_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n} \left(\frac{d^{n-2}}{d\rho^{n-2}} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\hbar \rho_0}{2c_0 V} \right)^{1/2} \prod_{j=1}^n (k_j)^{1/2} (a_{-\vec{k}_j}^+ + a_{\vec{k}_j}) \times \\ \times \Delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \dots + \vec{k}_n). \quad (10)$$

Выражение (9) можно сразу привести к нормальной форме: H_3 : (см. [9]) простым коммутированием с учетом того, что коэффициент перед операторами пропорционален $(k_1 k_2 k_3)^{1/2} \Delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3)$:

$$H_3 \equiv : H_3 : = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} [g_3^{(1)}(\vec{k}, \vec{q}) a_{\vec{k}-\vec{q}}^+ a_{\vec{q}}^+ a_{-\vec{k}}^+ + g_3^{(2)}(\vec{k}, \vec{q}) a_{\vec{k}-\vec{q}}^+ a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{k}}^+] + \\ + \text{эрм. сопр.}, \quad (11)$$

т. е. трехфононному взаимодействию соответствует два типа вершин (см. рис. 1), где $u = \frac{\rho_0}{c_0} \left(\frac{dc}{d\rho} \right)_{\rho_0}$:

$$g_3^{(1)}(\vec{k}, \vec{q}) = \left(\frac{\hbar^3 c_0}{32\rho_0} \right)^{1/2} (kq |\vec{k} - \vec{q}|)^{1/2} \left[\frac{2u-1}{3} - \cos(\widehat{\vec{k}, \vec{q}}) \right], \quad (12)$$

$$g_3^{(2)}(\vec{k}, \vec{q}) = \left(\frac{\hbar^3 c_0}{32\rho_0} \right)^{1/2} (kq|\vec{k}-\vec{q}|)^{1/2} [2\cos(\widehat{\vec{k}, \vec{q}}) + \cos(\widehat{\vec{q}, \vec{k}-\vec{q}}) + 2u - 1],$$

поэтому игнорирование взаимодействия через вершину $g_3^{(1)}(\vec{k}, \vec{q})$ приводит, например, к неполной перенормировке скорости фононов в работе [3].

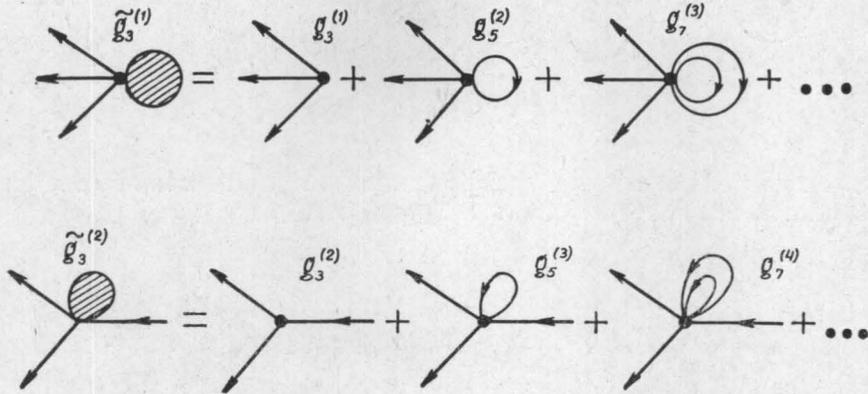


Рис. 1

§ 2. Основным методом исследования структуры фонон-фононного взаимодействия (8) будет приведение гамильтониана взаимодействия к нормальной форме с помощью теоремы Вика о спариваниях [9]. Применение этого метода к двухчастичному взаимодействию фермионов сразу позволяет из взаимодействия выделить члены Хартри—Фока и поправки к энергии основного состояния. Совершенно аналогично этот подход позволяет взаимодействие H_1 (8), содержащее в каждом H_n 2^n различных членов, представить в виде нормальной части $:H_1:$, в которой уже каждому ангармонизму соответствует лишь $n+1$ различных типов взаимодействия ($n \geq 4$):

$$\begin{aligned} :H_n: &= \left(\frac{1}{V} \right)^{n-2/2} \sum_{\vec{k}_1 \dots \vec{k}_n} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^{n-2}}{d\varphi^{n-2}} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} \times \\ &\times \left(\frac{\hbar\rho_0}{2c_0} \right)^{n/2} (k_1 k_2 \dots k_n)^{1/2} (a_{-k_1}^+ a_{-k_2}^+ \dots a_{-k_n}^+ + \\ &+ a_{-k_1}^+ a_{-k_2}^+ \dots a_{-k_{n-1}}^+ a_{k_n} + \dots + a_{-k_1}^+ a_{k_2} \dots a_{k_n} + a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_n}) \times \\ &\times \Delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \dots + \vec{k}_n), \end{aligned} \quad (13)$$

и суммы членов (также в нормальной форме) со всевозможными спариваниями. Так как спаривание двух операторов равно среднему по основному состоянию (вакууму), то единственным отличным от нуля спариванием для фононов будет

$$a_k a_{k'}^+ \equiv \langle \Psi_0 | a_k a_{k'}^+ | \Psi_0 \rangle = \Delta(\vec{k} - \vec{k}'),$$

которому на диаграммах (рис. 1—6) соответствуют замкнутые петли и сопоставляется фактор $V \frac{k_0^4}{8\pi^2}$.

Спаривания в членах взаимодействия с нечетным числом фононов приводят к перенормировке величины вершин более низкого порядка. Такой способ учета ангармонизмов высших порядков приводит, напри-

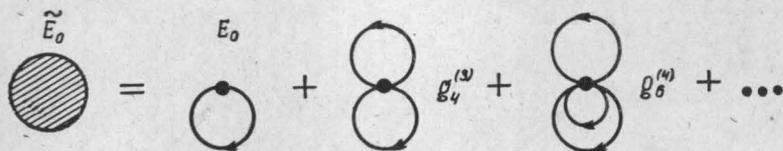


Рис. 2

мер, к изменению вершин трехфононного взаимодействия (аналогично изменяются все нечетнофононные вершины):

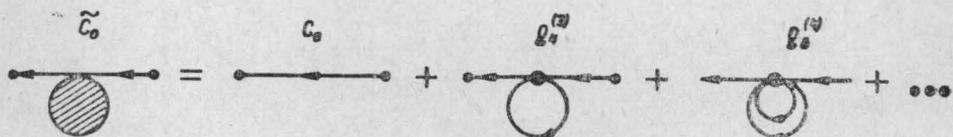


Рис. 3

$$\begin{aligned} \tilde{H}_3 = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} (\tilde{g}_3^{(1)}(\vec{k}, \vec{q}) a_{\vec{k}-\vec{q}}^+ a_{\vec{q}}^+ a_{-\vec{k}}^+ + \tilde{g}_3^{(2)}(\vec{k}, \vec{q}) a_{\vec{k}-\vec{q}}^+ a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{k}}) + \text{эрм. сопр.}, \\ \tilde{g}_3^{(1,2)} = g_3^{(1,2)}(\vec{k}, \vec{q}) + \sum_{n=5,7,9,\dots} \frac{a_n^{(1,2)}}{n!} \left(\frac{d^{n-2}}{d\varphi^{n-2}} \frac{c^2}{\varphi} \right)_{\rho_0} \times \\ \times \left(\frac{\hbar \rho_0}{2c_0} \right)^{\frac{n}{2}} (kq |\vec{k} - \vec{q}|^{1/2} \left(\frac{k_0^4}{8\pi^2} \right)^{n-3/2}, \end{aligned} \quad (14)$$

которым соответствуют диаграммы рис. 1, факторы $a_n^{(1,2)}$ определяют число вкладов от спариваний в соответствующие диаграммы, а k_0 —



Рис. 4

обрезающий волновой вектор фононов, характерный для гидродинамического подхода [2] (см. также [1, 11, 7]). Количество линий, выходящих из вершин, и их направления на диаграммах (см. рис. 1—6) определяются числом операторов рождения и уничтожения во взаимодействии, для эрмитовой сопряженной части направления линий меняются на противоположные. Нетрудно также заметить, что из свойства вершин: $g_n^{(i)} \sim (k_1 k_2 \dots k_n)^{1/2}$ следует, что диаграммы с одним свободным концом вклада во взаимодействие не дают.

Обратимся к членам взаимодействия с четным числом фононов. В первую очередь полные спаривания в членах с равным числом операторов рождения и уничтожения приводят к изменению энергии основного состояния $E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar c_0 k$ (см. рис. 2):

$$\tilde{E}_0 = E_0 + \sum_{n=4,6,8,\dots} V \frac{b_n}{n!} \left(\frac{d^{n-2}}{d\rho^{n-2}} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\hbar \rho_0}{2c_0} \right)^{n/2} \left(\frac{k_0^4}{8\pi^2} \right)^{n/2}. \quad (15)$$

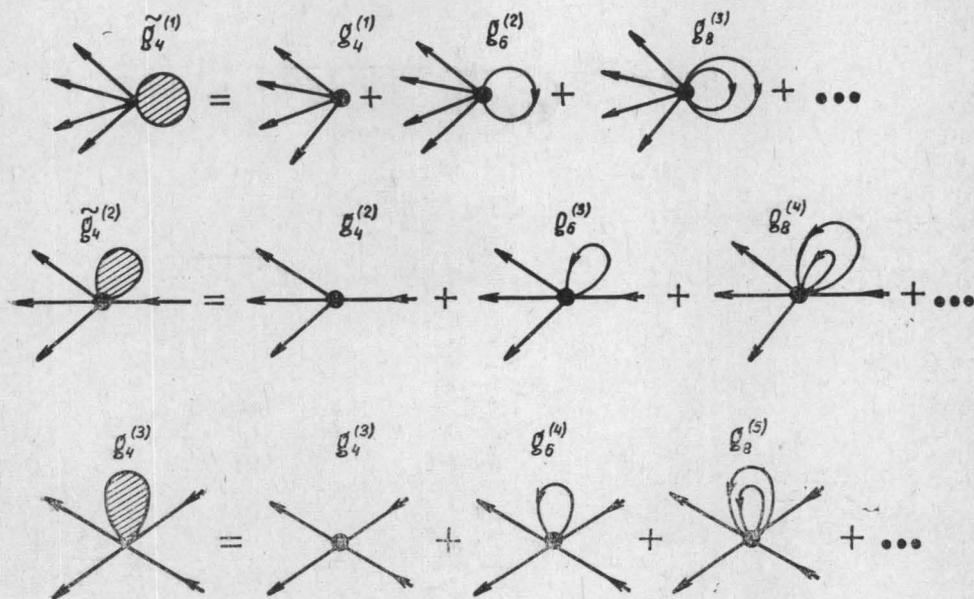


Рис. 5

Кроме того, спаривания в четных членах (10) приводят к изменению скорости звука за счет ангармонизмов высших порядков (рис. 3) (члены Хартри—Фока)

$$\tilde{c}_0 = c_0 + \sum_{n=4,6,8,\dots} \frac{e_n}{n! \hbar} \left(\frac{d^{n-2}}{d\rho^{n-2}} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\hbar \rho_0}{2c_0} \right)^{n/2} \left(\frac{k_0^4}{8\pi^2} \right)^{n-2/2} \quad (16)$$

и появлению вершин с двумя свободными концами (рис. 4), т. е. к новому типу взаимодействия:

$$\tilde{H}_2 = \sum_{\vec{k}} k \sum_{n=4,6,8,\dots} \frac{d_n}{n!} \left(\frac{d^{n-2}}{d\rho^{n-2}} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\hbar \rho_0}{2c_0} \right)^{n/2} \left(\frac{k_0^4}{8\pi^2} \right)^{n-2/2} a_{-k}^+ a_k^+ + \text{эрм. сопр.} \quad (17)$$

Так же, как и вершины (14), изменяются вершины с четным числом свободных концов, например вершины четырехфононного взаимодействия (рис. 5):

$$\tilde{H}_4 = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, q} (\tilde{g}_4^{(1)} a_{k_1+q}^+ a_{k_2-q}^+ a_{-k_2}^+ a_{-k_1}^+ + \tilde{g}_4^{(2)} a_{k_1+q}^+ a_{k_2-q}^+ a_{-k_2}^+ a_{k_1}^+ + \dots)$$

$$+ \tilde{g}_4^{(3)} a_{k_1+q}^+ a_{k_2-q}^+ a_{k_2} a_{k_1}) + \text{эрм. сопр.}$$

$$\tilde{g}_4^{(i)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}) = \sum_{n=4,6,8,\dots} \frac{f_n^{(i)}}{n!} \left(\frac{d^{n-2}}{d\rho^{n-2}} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\hbar \rho_0}{2c_0} \right)^{n/2} \left(\frac{k_0^4}{8\pi^2} \right)^{n-4/2} \times$$

$$\times (k_1 k_2 |\vec{k} + \vec{q}| \cdot |\vec{k}_2 - \vec{q}|)^{1/2} \quad (18)$$

($i=1, 2, 3$).

Факторы b_n , e_n , d_n и $f_n^{(i)}$ определяют число вкладов в соответствующие диаграммы.

$$\tilde{c}_0 - c_0 = \text{diagram} = \hbar \frac{L_4}{4!} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{2c_0} \right)^2 \frac{k_0^4}{8\pi^2} \quad (L_4=12)$$

$$\Sigma_n(k, \omega) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4}$$

$$\Sigma_{20}(k) = \text{diagram} = \hbar \frac{d_4}{4!} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{2c_0} \right)^2 k \frac{k_0^4}{8\pi^2} \quad (d_4=6)$$

$$\Sigma_{02}(k) = \text{diagram} = \hbar \frac{d_4}{4!} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{2c_0} \right)^2 k \frac{k_0^4}{8\pi^2}$$

Рис. 6

Таким образом, гамильтониан фононов (7, 8) приводится к более обозримому и удобному для применения теории возмущений виду, причем взаимодействие \tilde{H}_1 имеет простую структуру нормальной формы (13) плюс члены взаимодействия нового типа (17):

$$\tilde{H}_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{H}_n = \sum_{\vec{k}} (\tilde{g}_2^{(1)}(\vec{k}) a_{-\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}^+ + \tilde{g}_2^{(1)}(\vec{k}) a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}) +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{V} \right)^{n-2/2} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n} (\tilde{g}_n^{(1)} a_{-\vec{k}_1}^+ a_{-\vec{k}_2}^+ \dots a_{-\vec{k}_n}^+ + \tilde{g}_n^{(2)} a_{-\vec{k}_1}^+ a_{-\vec{k}_2}^+ \dots a_{-\vec{k}_{n-1}}^+ a_{\vec{k}_n} + \dots$$

$$\dots + \tilde{g}_n^{(2)} a_{-\vec{k}_1}^+ a_{\vec{k}_2} \dots a_{\vec{k}_n} + \tilde{g}_n^{(1)} a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} \dots a_{\vec{k}_n}) \Delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \dots + \vec{k}_n), \quad (19)$$

а диагональная часть \tilde{H}_0 определяется (7) и членами Хартри—Фока, изменяющими величину c_0 (16) и (15):

$$\tilde{H}_0 = \sum_{\vec{k}} \hbar \tilde{c}_0 k a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \tilde{E}_0. \quad (20)$$

Способ вычисления вершин $g_n^{(i)}$ на основе (10) приведен выше, так как (14) и (18) довольно просто обобщаются для любого n . Наиболее сложным является подсчет факторов $a_n^{(i)}$, b_n , e_n , d_n , $f_n^{(i)}$ который проводится непосредственным пересчитыванием спариваний в членах (10) с помощью теоремы Вика.

§ 3. От взаимодействия \tilde{H}_2 невозможно избавиться с помощью известного преобразования Боголюбова [9], так как при этом нару-

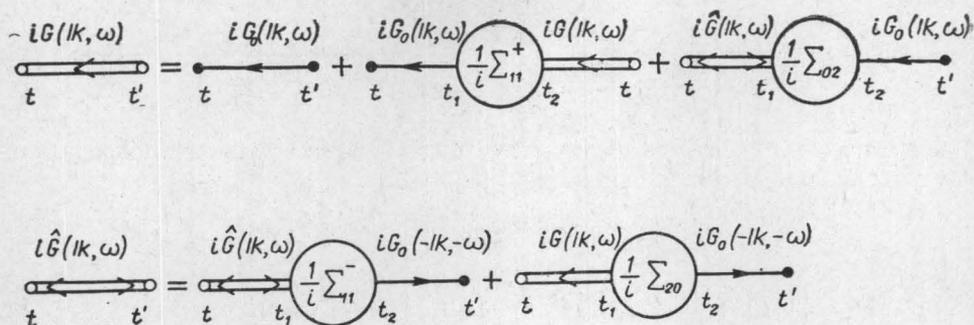


Рис. 7

шается простая структура остальной части взаимодействия (19), поэтому теория возмущений для $T=0^\circ\text{K}$, с помощью которой в настоящем параграфе будет исследована дисперсия фононов, принимает особую форму [10, 11]. Уравнение Дайсона для системы $\tilde{H}_0 + \tilde{H}_1$ (19, 20) заменяется двумя уравнениями Беляева (рис. 7):

$$\begin{aligned} G(\vec{k}, \omega) &= G_0(\vec{k}, \omega) + G_0(\vec{k}, \omega) \Sigma_{11}^+ G(\vec{k}, \omega) + G_0(\vec{k}, \omega) \Sigma_{02} \hat{G}(\vec{k}, \omega), \\ \hat{G}(\vec{k}, \omega) &= G_0(-\vec{k}, -\omega) \Sigma_{11}^- \hat{G}(\vec{k}, \omega) + G_0(-\vec{k}, -\omega) \Sigma_{20} G(\vec{k}, \omega), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\Sigma_{11}^\pm \equiv \Sigma_{11}(\pm \vec{k}, \pm \omega)$ — обычная неприводимая собственно энергетическая часть (массовый оператор), а $\Sigma_{02}(\vec{k}, \omega)$, $\Sigma_{20}(\vec{k}, \omega)$ — массовые операторы, учитывающие новый тип взаимодействия \tilde{H}_2 ; $\hat{G}(\vec{k}, \omega)$ — Фурье-образ аномальной функции Грина [11], которая отлична от нуля также благодаря взаимодействию \tilde{H}_2 :

$$\hat{G}(\vec{k}, t_1 - t_2) = \frac{1}{i} \frac{\langle \Psi_0 | T a_{\vec{k}}(t_1) \hat{S} a_{-\vec{k}}(t_2) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \hat{S} | \Psi_0 \rangle},$$

где $|\Psi_0\rangle$ — вакуум «голых фононов» (см. § 1), а \hat{S} — матрица рассеяния [9, 11]:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_{\text{int}}(t) dt\right), \\ \tilde{H}_{\text{int}}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_0 t} \tilde{H}_1 e^{-\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_0 t}, \quad a_{\pm k}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_0 t} a_{\pm k} e^{-\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_0 t}. \end{aligned}$$

Если учесть, что свободная функция Грина $G_0(\vec{k}, \omega)$ (рис. 6) имеет вид [2]:

$$G_0(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\omega - \tilde{\omega}_0(\vec{k}) + i\delta}, \quad \tilde{\omega}_0(\vec{k}) \equiv \tilde{c}_0 k,$$

тогда, разрешая систему (21) относительно $G(\vec{k}, \omega)$ и $\hat{G}(\vec{k}, \omega)$, получим:

$$G(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega + \tilde{\omega}_0(\vec{k}) + \Sigma_{11}^-}{\left[\omega - \frac{1}{2} (\Sigma_{11}^+ - \Sigma_{11}^-) \right]^2 - \left[\tilde{\omega}_0(\vec{k}) + \frac{1}{2} (\Sigma_{11}^+ + \Sigma_{11}^-) \right]^2 + \Sigma_{02}\Sigma_{20}},$$

$$\hat{G}(\vec{k}, \omega) = - \frac{\Sigma_{20}}{\left[\omega - \frac{1}{2} (\Sigma_{11}^+ - \Sigma_{11}^-) \right]^2 - \left[\tilde{\omega}_0(\vec{k}) + \frac{1}{2} (\Sigma_{11}^+ + \Sigma_{11}^-) \right]^2 + \Sigma_{02}\Sigma_{20}}. \quad (22)$$

Энергетический спектр взаимодействующих («одетых») фононов определяется особенностями полных функций Грина (22):

$$\left[\omega(\vec{k}) - \frac{1}{2} (\Sigma_{11}^+(\vec{k}, \omega(\vec{k})) - \Sigma_{11}^-(\vec{k}, \omega(\vec{k}))) \right]^2 - \left[\tilde{\omega}_0(\vec{k}) + \frac{1}{2} (\Sigma_{11}^+(\vec{k}, \omega) + \Sigma_{11}^-(\vec{k}, \omega)) \right]^2 + \Sigma_{02}\Sigma_{20} = 0. \quad (23)$$

Если в массовые операторы Σ_{11} , Σ_{02} , Σ_{20} учесть вклады только от диаграмм рис. 6, то из уравнения (22) получим спектр взаимодействующих фононов в первом приближении, т. е. с дисперсией и перенормировкой скорости c_0 , пропорциональными \hbar , так как вклады от *всех* диаграмм (рис. 6) имеют одинаковый порядок. Вычисление неприводимой собственно энергетической части $\Sigma_{11}(\vec{k}, \omega)$ во втором порядке теории возмущений в приближении трехфононного взаимодействия проведено в [2]. Правила соответствия в диаграммной технике для трехфононного взаимодействия (12) имеют особенность¹, состоящую в том, что лишь половина вкладов от диаграмм, соответствующих Σ_{11} (рис. 6), пропорциональна $g_3^{(i)}(\vec{k}, \vec{q})g_3^{(i)}(\vec{k}, \vec{q})$, тогда как вторая (из-за перекрестных спариваний) пропорциональна $g_3^{(i)}(\vec{k}, \vec{q})g_3^{(i)}(\vec{k}, \vec{k}-\vec{q})$. Т. е. одной из вершин в диаграммах Σ_{11} лишь в половине вкладов сопоставляется обычный фактор $\left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{1}{V\sqrt{V}} g_3^{(i)}(\vec{k}, \vec{q})$, для другой половины в этом факторе \vec{q} заменяется $\vec{k}-\vec{q}$. Учитывая эту особенность диаграммной техники, для $\Sigma_{11}(\vec{k}, \omega)$ получаем выражение

$$\Sigma_{11}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{V} \sum_{\vec{q}} \frac{g_3^{(2)}(\vec{k}, \vec{q})g_3^{(2)}(\vec{k}, \vec{q}) + g_3^{(2)}(\vec{k}, \vec{k}-\vec{q}) + 3g_3^{(1)}(\vec{k}, \vec{q})g_3^{(1)}(\vec{k}, \vec{q}) + g_3^{(1)}(\vec{k}, \vec{k}-\vec{q})}{\omega^2 - (\tilde{\omega}_0(\vec{q}) + \tilde{\omega}_0(\vec{k}-\vec{q}))^2}. \quad (24)$$

Из (24) следует, что $\Sigma_{11}^+ = \Sigma_{11}^-$, т. е. уравнение (23) для спектра ω принимает вид

$$\omega^2(\vec{k}) = [\tilde{\omega}_0(\vec{k}) + \Sigma_{11}(\vec{k}, \omega(\vec{k}))]^2 - \Sigma_{02}(\vec{k}, \omega(\vec{k}))\Sigma_{20}(\vec{k}, \omega(\vec{k})). \quad (25)$$

¹ Это не учтено в [3], хотя перекрестные-хронологические спаривания изменяют величину вершин $g_3^{(1,2)}(\vec{k}, \vec{q})$ и в коллинеарном приближении (см. (A6) в [3]).

Решение уравнения (25) вызывает большие трудности, поэтому мы ограничимся вначале случаем $k \ll k_0$ (§ 2), когда выражение (24) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{11} (\vec{k}, \omega) \simeq & \frac{\hbar \tilde{c}_0^2}{(4\pi)^2 \rho_0} \zeta \int_0^k dq \frac{\left[(u+1)^2 + \frac{1}{3} (u-2)^2 \right] k^2 q^3 (k-q)}{\omega^2 - \tilde{c}_0^2 k^2} + \\ & + \frac{\hbar \tilde{c}_0^2}{32\pi^2 \rho_0} \int_{-1}^{+1} d\lambda \int_k^{k_0} dq \frac{k q^5 \left[4(u-1)^2 + \frac{1}{3} (2u-1)^2 + \lambda (2u-3) \right]}{\omega^2 - 4\tilde{c}_0^2 q^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

В первом интервале мы воспользовались коллинеарным приближением ($\lambda \equiv \cos(\vec{k}, \vec{q}) \simeq 1$), так как при $q < k$ знаменатель в (24) имеет острый (шириной ζ) минимум при $\lambda \sim 1$, во втором интеграле мы воспользовались условием $k \ll k_0$ и тем, что по \vec{q} ведется интегрирование, т. е. $\cos(\vec{k}, \vec{k}-\vec{q}) \simeq \cos(\vec{k}, \vec{q})$ и $\cos(\vec{k}-\vec{q}, \vec{q}) \simeq -1$. Тогда из уравнения (25) массовым оператором (26) и $\Sigma_{02}(\vec{k}) = \Sigma_{20}(\vec{k})$ (рис. 6) получим для спектра взаимодействующих фононов выражение

$$\omega(\vec{k}) = \tilde{c}_{\text{рен}} k \left(1 - \gamma k^2 - \delta k^4 \ln\left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \right), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\text{рен}}^2 = & \left\{ \tilde{c}_0 - \frac{\hbar k_0^4}{64\rho_0 (2\pi)^2} \left[4(u-1) + \frac{1}{3} (2u-1)^2 \right]^2 - \right. \\ & \left. - \left[\frac{\hbar d_4}{4!} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} \frac{c^2}{\rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{2c_0} \right)^2 \frac{k_0^4}{8\pi^2} \right]^2 \right\}, \\ \gamma = & \frac{1}{2} \left[\alpha + \left(\alpha^2 + \zeta \frac{\hbar \left[(u+1)^2 + \frac{1}{3} (2u-1)^2 \right]}{80\rho_0 \pi^2 s} \right)^{1/2} \right], \\ \alpha = & \frac{\hbar k_0^2 \left[4(u-1)^2 + \frac{1}{3} (2u-1)^2 \right]}{128\rho_0 \tilde{c}_{\text{рен}} (2\pi)^2}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\delta = \frac{\hbar \left[4(u-1)^2 + \frac{1}{3} (2u-1)^2 \right]}{2\rho_0 \tilde{c}_{\text{рен}} (32\pi)^2}, \quad s = \tilde{c}_0 - \frac{\hbar k_0^2 \left[4(u-1)^2 + \frac{1}{3} (2u-1)^2 \right]}{(16\pi)^2 \rho_0}.$$

Из (27, 28) следует, что взаимодействие фононов (рис. 6) приводит не только к перенормировке скорости «голых» квазичастиц, но и к дисперсии спектра, которая обеспечивает устойчивость однофононного состояния ($T=0^\circ\text{K}$) относительно распада, что подтверждается экспериментами [12] при $T \rightarrow 0^\circ\text{K}$. Отклонение от линейности спектра реальных фононов в жидком гелии ($\frac{d^2}{dk^2} \omega(\vec{k}) < 0$) обеспечивает конечность сечения фонон-фононного рассеяния, на что впервые указали Ландау и Халатников при расчете вязкости He_4 [13].

Решая уравнение (25) в том же приближении (26), для случая $k \sim k_0$ получаем

$$\omega(\vec{k}) = \tilde{c}_{\text{ren}} k (1 - \gamma' k^2), \quad (29)$$

$$\gamma' = \left\{ \frac{\hbar \zeta \left[(u+1)^2 + \frac{1}{3} (2u-1)^2 \right]}{80 \rho_0 \tilde{c}_{\text{ren}} (2\pi)^2} + k_0^4 \left(\frac{\hbar \zeta \left[(u+1)^2 + \frac{1}{3} (2u-1)^2 \right]}{(8\pi)^2 \rho_0 \tilde{c}_{\text{ren}}} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Спектры перенормированных в первом приближении фононов (27) (без логарифмического члена) и (29) совпадают со спектром, предложенным в [13]. Анализ экспериментальных данных показывает [15], что закон дисперсии $\sim -\tilde{c}_{\text{ren}} \gamma k^3$ наиболее точно соответствует наблюдаемому отклонению спектра фононов от линейности [12]. Величины дисперсии (28, 29) при $\rho_0 = 0,15 \text{ г/см}^3$, $\tilde{c}_{\text{ren}} = 2,38 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$, $u \simeq 2,7$ [7], $\rho \frac{du}{d\rho} = 3$ [5], $\zeta \simeq 0,1$ и $k_0 \simeq 1 \text{ \AA}^{-1}$ равны

$$\gamma \simeq 2,7 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2, \quad \gamma' \simeq 3,2 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2,$$

т. е. находятся в хорошем согласии с современными данными¹ [14].

В заключение необходимо отметить, что обсуждение дисперсии и других свойств [3—5] фононов на основе нормализованного гамильтониана (19, 20) является более точным и последовательным, так как позволяет полностью учесть все вклады от многофононных процессов данного порядка, прежде чем переходить к высшим приближениям (см. [3, 5]).

Автор выражает благодарность проф. Я. П. Терлецкому за помощь в работе и доц. И. А. Квасникову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Питаевский Л. ЖЭТФ, **31**, 536, 1956.
2. Загребнов В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **12**, 84, 1971.
3. Petnick S., Ter Haar D. Physica, **32**, 1905, 1966.
4. Abraham B., Ecstein Y., Ketterson J., Kuchnir M. Phys. Rev. Lett., **19**, 690, 1967.
5. Enz C. Lett. Nuovo Cim., **2**, No. 7, 1969.
6. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, **11**, 592, 1941.
7. Халатников И. М. Введение в теорию сверхтекучести. М., «Наука», 1965.
8. Bierter J., Morrison D. Lett. Nuovo Cim., **1**, No. 14, 1969.
9. Марч Н., Янг У., Сампантхар С. Проблема многих тел в квантовой механике. М., «Мир», 1969.
10. Беляев С. Т. ЖЭТФ, **34**, 417, 1958; Hugenholtz N., Pines D. Phys. Rev., **116**, 489, 1959.
11. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., 1962.
12. Henshaw O., Woods A. Phys. Rev., **121**, 1266, 1961.
13. Ландау Л. Д., Халатников И. М. ЖЭТФ, **19**, 637, 709, 1949.
14. Disatnik Y. Phys. Rev., **158**, 162, 1967.
15. Oransfeld K. Z. für Physik., **179**, 525, 1964.
16. Халатников И. М., Черникова Д. М. ЖЭТФ, **49**, 1457, 1965; Андреев А., Халатников И. М. ЖЭТФ, **44**, 769, 2058, 1963; J. Low Temper. Phys., **2**, No. 2, 1970.
17. Cowley R., Woods A. Phys. Rev. Lett., **24**, 646, 1970; Abraham B., Ecstein Y., Ketterson J. Phys. Rev., **A1**, 250, 1970.

¹ Ландау и Халатников (см. [7]) получили для величины дисперсии значение $\gamma \simeq 2,9 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$, которое, как показали дальнейшие исследования и анализ экспериментальных данных [14, 16], завышено по крайней мере на один порядок. Противоречивость последних экспериментов [17] не позволяет уточнить величину γ и сравнить с полученной в настоящей работе.