

УДК 621.373.431.2

Г. А. СИДОРОВА

ВЗАИМНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ДВУХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

Рассматривается взаимная синхронизация двух релаксационных генераторов по одному опорному уровню на примере генераторов треугольного напряжения. Получены области существования синхронных режимов и исследована их устойчивость.

Теории синхронизации генераторов разрывных колебаний периодическим внешним воздействием посвящено немало работ [1—3], обзор литературы в [3]. Взаимная синхронизация релаксационных генераторов исследуется лишь в [4, 6] и работах С. П. Моцкевичуса (например, [7]), где проводится сложный анализ фазового пространства двух связанных генераторов прямоугольных колебаний.

В настоящей работе аналитически исследуется взаимная синхронизация двух генераторов треугольного напряжения. Исследование проводится на основе метода, предложенного П. Н. Занадворовым для анализа синхронизации генераторов разрывных колебаний периодическим внешним воздействием [3].

На рис. 1 показаны формы колебаний двух генераторов треугольного напряжения X и Y с периодами автономного режима $T = T_1 + T_2$, $\theta = \theta_1 + \theta_2$ ($T_1, T_2, \theta_1, \theta_2$ — конечные времена прямого и обратного хода) и амплитудами $\Delta x_0 = x_2 - x_1$, $\Delta y_0 = y_2 - y_1$ (x_1, x_2, y_1, y_2 — нижние и верхние опорные уровни напряжения, условно — потенциалы погасания и зажигания релаксаторов). Построение выполнено для параметров: $T_1 = 4, T_2 = 1, \theta_1 = 4, \theta_2 = 2; \Delta x_0 = \Delta y_0 = 3$. В некоторый момент времени A включается связь между генераторами: выходное напряжение $x(t)$ генератора X подается с определенным ослаблением (коэффициент связи $D < 1$, в данном построении $D = 0,4$) на верхний опорный уровень генератора Y так, что $Dx(t) \geq y'_2; y'_2 = y_2 - \frac{D\Delta x_0}{2}$. (см. рис. 1). Аналогично, с тем же коэффициентом D , связываем Y с генератором X , так что $Dy(t) \geq x'_2; x'_2 = x_2 - \frac{D\Delta y_0}{2}$.

Считаем, что в рассматриваемой системе: 1) нет дополнительных ограничений на величину амплитуды, кроме потенциала погасания и промодулированного потенциала зажигания; 2) при всех $0 < D < 1$ воздействие синхронизирующего напряжения не влияет на постоянную вре-

мени цепи заряда и разряда генераторов, т. е. наклоны напряжений не изменяются при включении связи; 3) запаздывание в связи отсутствует.

Эти условия заранее определяют некоторые свойства траекторий установившегося режима.

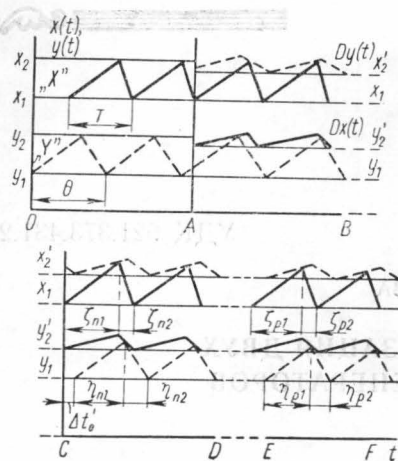


Рис. 1. Эпюры выходного напряжения генераторов x и y : OA — автономный режим, AB — начало процесса установления, CD — колебания, близкие к установившимся, EF — установившийся режим

1. В системе помимо циклической синхронизации возможно установление лишь двух синхронных режимов с отношением периодов 1:1 и 1:2 (первый и второй порядок синхронизации).

Действительно, по условию 1), все вершины траекторий генераторов X и Y расположены на траекториях $Dy(t)$ и $Dx(t)$ соответственно. Следовательно, при синхронизации выше второго порядка на прямом или обратном ходе напряжений $Dx(t)$ или $Dy(t)$ будет расположено больше одной вершины синхронизируемого напряжения генераторов Y или X . Для треугольной формы напряжения это означает неравенство амплитуд (следовательно, и остальных параметров) на каждом шаге синхронного режима, т. е. либо полное отсутствие синхронизации, либо циклическую синхронизацию.

2. Вершины траекторий $Dx(t)$, $Dy(t)$ являются проекциями соответствующих вершин напряжений $x(t)$, $y(t)$. Поэтому, если прямой ход r -го шага одного генератора встречается с прямым (обратным) ходом s -го шага синхронизирующего напряжения, то прямой ход s -го шага другого генератора не может встретиться с прямым (обратным) ходом r -го шага синхронизирующего напряжения. Отсюда следует, что в установившемся режиме, например, первого порядка, возможны следующие траектории: встреча прямого хода одного генератора с прямым (обратным) ходом синхронизирующего напряжения необходимо влечет за собой встречу прямого хода другого генератора с обратным (прямым) ходом синхронизирующего напряжения. Как будет показано в дальнейшем, генератор, прямой ход которого встречается с прямым ходом синхронизирующего напряжения, всегда имеет большую частоту в автономном режиме. Будем называть этот генератор *ведущим* и соответственно другой — *ведомым*.

Предположим, что в системе устанавливается синхронный режим первого порядка с ведущим генератором X . Процесс установления при подходе к синхронному режиму содержит, начиная с некоторого i -го шага (например, генератора X), несколько шагов с колебаниями, близкими по форме к равновесным (участок CD на рис. 1). Далее количество шагов в траекториях обоих генераторов будет одинаковым. Совместим начало отсчета (точку C) с началом прямого хода одного из таких шагов генератора X . Введем обозначения: $\Delta t'_0$ — начальный временной сдвиг между началами прямых ходов генераторов X и Y ; $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \eta_{n1}, \eta_{n2}$ — времена прямого и обратного хода генераторов X и

У на n -м шаге процесса. Тогда сдвиг во времени между вершинами n -х треугольников (рис. 1) будет равен

$$\Delta t_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\eta_{k1} + \eta_{k2}) + \eta_{n1} - \sum_{k=1}^{n-1} (\xi_{k1} + \xi_{k2}) - \xi_{n1} + \Delta t'_0. \quad (1)$$

Равенство напряжений генераторов X , Y и синхронизирующих напряжений $Dy(t)$, $Dx(t)$, в месте их встречи, а также постоянство наклонов позволяют написать систему четырех итерационных уравнений для последовательного нахождения времен прямого и обратного хода напряжений на каждом шаге процесса установления (для простоты предполагается $\Delta x_0 = \Delta y_0$).

$$\begin{aligned} \frac{\xi_{n1}}{T_1} - 1 + \frac{D}{2} &= \frac{D}{\theta_1} (\eta_{n1} - \Delta t_n), & \frac{\xi_{n1}}{T_1} - 1 &= \frac{\xi_{n2}}{T_2}, \\ \frac{\eta_{n1}}{\theta_1} - 1 + \frac{D}{2} &= -\frac{D}{T_2} \Delta t_n + \frac{D}{T_1} \xi_{n1}, & \frac{\eta_{n1}}{\theta_1} &= \frac{\eta_{n2}}{\theta_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

где $n=1, 2, \dots, m$.

С установлением равновесного режима для достаточно больших n начинают выполняться следующие равенства (p — индекс равновесного режима):

$$\xi_{n-1,1} = \xi_{n1} = \xi_{p1}; \quad \xi_{n-1,2} = \xi_{n2} = \xi_{p2},$$

$$\eta_{n-1,1} = \eta_{n1} = \eta_{p1}; \quad \eta_{n-1,2} = \eta_{n2} = \eta_{p2}; \quad \Delta t_{n-1} = \Delta t_n = \Delta t_p.$$

Уравнения равновесного режима получаем из (2), заменяя индекс n на p и добавляя равенство для устанавливающихся периодов генераторов в первом порядке синхронизации: $\xi_{p1} + \xi_{p2} = \eta_{p1} + \eta_{p2} = \tau_T$. Решая уравнения равновесного режима, находим величины

$$\begin{aligned} \eta_{p1} &= \frac{\theta_1 (2 - D) (\theta_1 - T_2)}{2 \left[\theta_1 \left(\frac{\theta}{T} - D \right) - T_2 \left(1 - D \frac{\theta}{T} \right) \right]}, \\ \Delta t_p &= \frac{\theta_1 T_2 (2 - D) (1 + D) \left(\frac{\theta}{T} - 1 \right)}{2D \left[\theta_1 \left(\frac{\theta}{T} - D \right) - T_2 \left(1 - D \frac{\theta}{T} \right) \right]}. \end{aligned} \quad (3)$$

Остальные параметры связаны с η_{p1} простыми линейными зависимостями: $\eta_{p2} = \eta_{p1} \theta_2 / \theta_1$, $\xi_{p1} = \eta_{p1} \theta T_1 / T \theta_1$, $\xi_{p2} = \eta_{p1} \theta T_2 / T \theta_1$, $\Delta x_p = \Delta x_0 \xi_{p1} / T_1$; $\Delta y_p = \Delta y_0 \eta_{p1} / \theta_1$.

Здесь Δx_p , Δy_p — установившиеся амплитуды. Итак, генераторы, изображенные на рис. 1, имеют равновесные параметры: $\xi_{p1} = 4,3$, $\xi_{p2} = 1,1$, $\eta_{p1} = 3,6$, $\eta_{p2} = 1,8$, $\Delta x_p = 3,2$, $\Delta y_p = 2,7$.

Решения (3) имеют два особых случая: $\theta_1 = T_2$, $\theta \neq T$. Исследуемого синхронного режима нет, все параметры равны нулю. $\theta_1 = T_2$, $\theta = T$. Равновесные параметры устанавливаются с первого шага и полностью зависят от времени $\Delta t'_0$, т. е. от разности фаз между генераторами в момент включения связи. К этому случаю относятся, например, одинаковые равнобедренные генераторы.

В остальных случаях (при $\theta_1 \neq T_2$) необходимым условием существования синхронных колебаний (см. рис. 1) является выполнение неравенств:

$$\eta_{p1} \geq \Delta t_p, \xi_{p2} \geq \Delta t_p, \Delta t_p > 0. \quad (4)$$

Следует отметить, что равновесный режим возможен не при всех коэф-

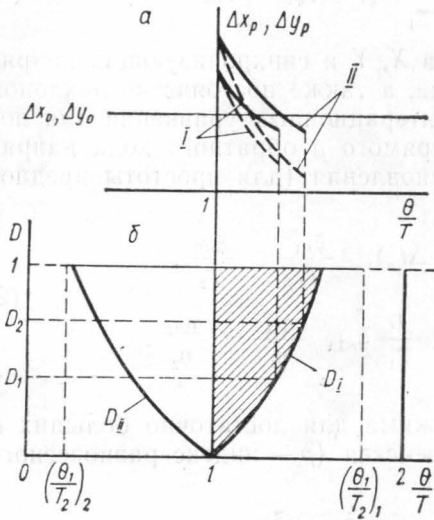


Рис. 2. Зависимость равновесных амплитуд от расстройки (а). Область синхронизации 1-го и 2-го порядка (генератор X — ведущий) (б)

фициентах связи D . Связь $D > \frac{\theta_1}{T_1}$ соответствует такому наклону прямого хода напряжения $x(t)$, который не может встретиться с прямым ходом напряжения $Dy(t)$, т. е. рассматриваемый синхронный режим при таких связях перестает существовать. $D > \frac{T_1}{\theta_1}$ соответ-

ствует в системе самоэкранированию — явлению, при котором часть фаз синхронизирующего напряжения $Dx(t)$ становится недостижимой для напряжения прямого хода $y(t)$.

С учетом сказанного, неравенства (4) дают следующие области существования синхронного режима:

$$1. \quad 1 < \frac{\theta}{T} < \frac{\theta_1}{T_2}, \quad \text{при связях } D_1 < D < \min \left\{ \frac{\theta_1}{T_1}, \frac{T_1}{\theta_1}, 1 \right\},$$

$$D_1 = \frac{\theta_1}{T_2} \left(\frac{\theta}{T} - 1 \right) / \left(\frac{\theta_1}{T_2} - \frac{\theta}{T} \right). \quad (5)$$

$$2. \quad \frac{\theta_1}{T_2} < \frac{\theta}{T} < 1, \quad \text{при связях } D_{II} < D < \min \left\{ \frac{\theta_1}{T_1}, \frac{T_1}{\theta_1}, 1 \right\},$$

$$D_{II} = \left(\frac{\theta}{T} - 1 \right) / \left(\frac{\theta_1}{T_2} - \frac{\theta}{T} \right).$$

Сечение областей на плоскости параметров $\left(D, \frac{\theta}{T} \right)$ при $\frac{\theta_1}{T_2} = \text{const}$ показано на рис 2б.

Исследуем устойчивость полученного равновесного режима по отношению к малым возмущениям. Случайная флуктуация одного из параметров системы, например, потенциала погасания, приводит к отклонениям параметров от равновесных величин. Начинается процесс установления возмущенного равновесного режима. Если режим устойчив, то отклонения от равновесных параметров на каждом шаге будут постепенно уменьшаться, стремясь к нулю. Уравнения для отклонений δ_n , σ_n от параметров $\xi_{\eta 1}$ $\eta_{\eta 1}$ на n -м шаге процессе установления имеют вид (остальные параметры связаны с ними линейно):

$$\frac{\delta_n}{T_1} = \frac{D}{\theta_1} \left[\delta_n + \frac{T}{T_1} \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k - \frac{\theta}{\theta_1} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k - \Delta \right],$$

$$\frac{\sigma_n}{\theta_1} = -\frac{D}{T_2} \left[\sigma_n + \frac{\theta}{\theta_1} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k - \frac{T}{T_1} \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k - \delta_n + \Delta \right] + \frac{D}{T_1} \delta_n, \quad (6)$$

где Δ — начальное отклонение.

Аналогично [2], введем обозначения:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \delta_k = \alpha_{n-1}, \quad \sum_{k=1}^n \delta_k = \alpha_n, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k = \beta_{n-1}, \quad \sum_{k=1}^n \sigma_k = \beta_n,$$

откуда $\delta_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$, $\sigma_n = \beta_n - \beta_{n-1}$, и для α_n , α_{n-1} , β_n , β_{n-1} получаем рекуррентные соотношения:

$$\alpha_n = A_1 \alpha_{n-1} + B_1 \beta_{n-1} + C_1, \quad \beta_n = A_2 \alpha_n + B_2 \beta_{n-1} + C_2, \quad (7)$$

где A , B , C — постоянные величины, зависящие от параметров. После преобразований соотношений (7) получаем общие члены последовательности малых отклонений:

$$\delta_n = q^{n-1} \delta_1, \quad \sigma_n = q^{n-1} \sigma_1, \quad (8)$$

где $q = (T_2 - D\theta_2)(\theta_1 + DT_2)/(T_2 + D\theta_1)(\theta_1 - DT_1)$.

Следовательно, равновесное состояние устойчиво при выполнении неравенства $|q| < 1$. Исследование его с учетом указанных ранее ограничений на связь показывает, что устойчивый синхронный режим существует лишь в первой из областей (5), причем возникают новые ограничения на связь D : если

$$D < \frac{T_2}{\theta_2}, \quad \text{то } D_1 < D < \min \left\{ \frac{\theta_1}{T_1}, \frac{T_1}{\theta_1}, 1 \right\} \quad (9)$$

и если $\frac{T_2}{\theta_2} < D < \min \left\{ \frac{\theta_1}{T_1}, \frac{T_1}{\theta_1}, D^*, 1 \right\}$, где D^* — положительный корень полинома:

$$D^2 (T_2 \theta_2 + T_1 \theta_1) + D (\theta_1 \theta_2 - T_2^2 - \theta_1^2 + T_1 T_2) - 2\theta_1 T_2 = 0.$$

Например, синхронный режим для генераторов на рис. 1 существует и устойчив, так как их параметры автономного режима удовлетворяют условиям (5) и (9).

На рис. 2, б заштрихована область устойчивого режима синхронизации. Верхняя граница области (соотношения (9)) зависит от выбора конкретных параметров и на рисунке не показана. На рис. 2, а представлены зависимости амплитуд устойчивого равновесного режима от расстройки $\frac{\theta}{T}$ при двух различных коэффициентах связи: кривые I — при связи D_1 , кривые II — при связи D_2 , $D_2 > D_1$. Амплитуды ведущего генератора X показаны сплошной линией, ведомого Y — пунктирной.

Расчеты, проведенные при исследовании устойчивости, позволяют оценить скорость установления при небольшом отклонении от равновесного состояния. Как видно из (8), число периодов, за которые начальное отклонение уменьшается в e раз, равно $N_0 = -(\ln q)^{-1}$. Так, для генераторов с параметрами $T_1 = 6,4$, $T_2 = 0,6$, $\theta_1 = 6$, $\theta_2 = 1$, $N_0 \approx 11$ периодов при $D = 0,01$; $N_0 = 1,3$ при $D = 0,1$; $N_0 < 1$ при $D = 0,5$. Таким образом, время установления тем меньше, чем больше связь. Кроме то-

го, как показали вычисления, в пределах области синхронизации время установления уменьшается с увеличением расстройки $\frac{\theta}{T}$.

Предположим, что в системе устанавливается режим с ведущим генератором Y . В этом случае форма траекторий не изменится, но генераторы X и Y как бы меняются местами. Значит, все полученные результаты будут справедливы, но с соответствующим переобозначением параметров (вместо θ везде пишется T и наоборот, с сохранением прежних индексов). Область синхронизации будет иметь прежний вид (рис. 2, б), но уже на плоскости параметров $(D, \frac{T}{\theta})$ при $\frac{T_1}{\theta_2} = \text{const}$. Таким образом, действительно ведущий генератор всегда имеет большую частоту, чем ведомый. Заметим, что режим, неустойчивый для случая, когда генератор X — ведущий, может стать устойчивым с ведущим генератором Y , если наряду с неравенствами $\theta_1 < T_2$, $\theta < T$ выполняется также неравенство $T_1 > \theta_2$.

Итак, система из двух взаимно связанных генераторов треугольного напряжения имеет синхронный режим кратности периодов 1:1, если параметры автономного режима подчиняются неравенству $1 < \frac{\theta}{T} < \frac{\theta_1}{T_2}$, с ограничениями на связь (9) (параметры T относятся к ведущему генератору, θ — к ведомому).

Для второго порядка синхронизации область синхронных колебаний вырождается в вертикальную прямую при $\theta = 2T$ (ведущий генератор X).

Все выкладки были проведены для идеализированной системы. В действительности, сильное взаимодействие при достаточно большой связи приводит к изменению парциальных параметров генераторов и появлению нелинейных искажений синхронизирующего напряжения. Поэтому точная верхняя граница области синхронизации для конкретной реальной системы может быть указана только после дополнительного исследования.

Можно указать на одно из возможных применений исследованной системы. Известно [5], что синхронные колебания концентраций веществ в химических и биохимических реакторах в большом числе случаев имеют релаксационный характер. Возможно, рассмотрение взаимной синхронизации двух релаксаторов позволит ближе подойти к изучению механизма этих явлений. При этом общность задачи не страдает от выбора треугольной формы колебаний. В общем случае вместо линейных уравнений (2) получим трансцендентные уравнения процесса установления, которые надо будет решать на ЭЦВМ.

Благодарю И. И. Минакову и Ю. М. Романовского за критические замечания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М., ГИТТЛ, 1952.
2. Виткевич В. В. ЖТФ, 15, вып. 11, 1945.
3. Занадворов П. Н. «Вестн. Ленингр. ун-та», № 22, физика и химия, вып. 4, 1967.
4. Бремзен А. С., Файнберг И. С. ЖТФ, 11, вып. 10, 1941.
5. Колебательные процессы в биологических и химических системах. Труды Всесоюзного симпозиума по колебательным процессам в биологических и химических системах. М., «Наука», 1967.
6. Родыгин Л. Ю. В сб. «Памяти А. А. Андропова», Изд-во АН СССР, 1955.
7. Моцкевичус С. П. «Литовский физический сборник», 8, № 1—2, 185, 1968.

Поступила в редакцию
4.9 1970 г.

Кафедра общей физики
для мехмата