

Г. А. БЕНДРИКОВ, В. И. ОГОРОДНИКОВА, Н. А. СУХАЧЕВА

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе исследуются общие свойства траекторий корней характеристических уравнений n -го порядка с комплексными коэффициентами. Рассмотрение динамики двумерных систем с идентичными каналами и антисимметричными перекрестными прямыми, обратными связями приводит к исследованию таких уравнений. Рассмотрены геометрический и аналитический способы построения траекторий корней на плоскости комплексных частот, получены уравнения траекторий корней и формулы параметра траекторий. Дан пример, иллюстрирующий применение метода траекторий корней к исследованию двумерной следящей системы углового сопровождения.

В работе [1] рассмотрены общие свойства траекторий корней характеристических уравнений с действительными коэффициентами, когда параметр траекторий входит в коэффициенты уравнения линейно. В ряде случаев можно понизить порядок [2—6] характеристического уравнения, переходя от уравнений с действительными коэффициентами к уравнениям с комплексными коэффициентами за счет разложения первого на множители или непосредственно пользуясь комплексными координатами [5, 7, 8]. Это можно сделать, например, для характеристических уравнений двумерных систем с идентичными каналами и антисимметричными перекрестными (прямыми, обратными) связями.

Пусть имеется характеристическое уравнение вида

$$\Phi_n + jH_s + \bar{\rho}(\Psi_m + j\theta_l) = 0, \quad (1)$$

где Φ_n , H_s , Ψ_m , θ_l — полиномы целых положительных степеней от p :

$$\begin{aligned} \Phi_n &= a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \\ H_s &= c_0 p^s + c_1 p^{s-1} + \dots + c_s, \\ \Psi_m &= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m, \\ \theta_l &= d_0 p^l + d_1 p^{l-1} + \dots + d_l, \end{aligned} \quad (2)$$

причем $\max(n, s) \geq \max(m, l)$, $\rho = \rho e^{j\epsilon}$ (ϵ может, например [5], определять фазовый сдвиг между опорным напряжением и сигналом рассогласования в двумерных системах). Некоторые частные случаи уравнения (1) рассмотрены в работах [2, 3, 4, 6].

За параметр траекторий корней выберем ρ . Остальные параметры считаем заданными.

Рассмотрим геометрический метод построения траекторий корней. Пусть для определенности $n=s$, $m=l$. Как известно [1], начальные точки траекторий определяются из уравнения (1) при $\rho=0$:

$$\Phi_n + jH_s = 0, \quad (3)$$

предельные точки — при $\rho = \pm \infty$

$$\Psi_m + j\theta_l = 0. \quad (4)$$

Положение начальных и предельных точек определяется построением траекторий корней уравнений (3) и (4) при выборе одного из параметров за параметр траекторий начальных или предельных точек [4]. Это дает возможность выяснить, как будут изменяться свойства всей системы при различном задании начальных или предельных точек на этих траекториях.

Траектории корней уравнения (1) не симметричны относительно действительной оси. Общее число их равно $2n$. Причем n траекторий (для $\rho > 0$) соответствуют положительному годографу (нечетные траектории), другие n траекторий (для $\rho < 0$) — отрицательному годографу (четные траектории).

Получим основное фазовое уравнение. Для этого, считая основные (начальные и предельные) точки заданными, запишем уравнение (1) в виде

$$(a_0 + jc_0) \prod_1^n (p^* - p_\nu) + \rho (b_0 + jd_0) e^{i\varepsilon} \prod_1^m (p^* - z_\mu) \equiv 0 \quad (5)$$

(p^* — точки на траекториях).

Разности ($p^* - p_\nu$), ($p^* - z_\mu$) на комплексной плоскости p являются векторами, которые можно представить через их модули и фазы:

$$\begin{aligned} (p^* - p_\nu) &= |p^* - p_\nu| e^{j\varphi_\nu}, \\ (p^* - z_\mu) &= |p^* - z_\mu| e^{j\psi_\mu}. \end{aligned} \quad (6)$$

Аргументы φ_ν , ψ_μ в уравнении (6) — углы, образованные векторами с положительным направлением действительной оси. Эти векторы проведены из основных точек в точки на траекториях. Аналогично через модули и фазы можно представить величины ($a_0 + jc_0$), ($b_0 + jd_0$):

$$\begin{aligned} (a_0 + jc_0) &= \sqrt{a_0^2 + c_0^2} e^{j \arctg \frac{c_0}{a_0}}, \\ (b_0 + jd_0) &= \sqrt{b_0^2 + d_0^2} e^{j \arctg \frac{d_0}{b_0}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (6), (7) в тождество (5), найдем, что

$$-\rho \equiv \frac{\sqrt{a_0^2 + c_0^2} \prod_1^n |p^* - p_\nu| e^{j \left(\arctg \frac{c_0}{a_0} - \arctg \frac{d_0}{b_0} - \varepsilon + \sum_1^n \varphi_\nu - \sum_1^m \psi_\mu \right)}}{\sqrt{b_0^2 + d_0^2} \prod_1^m |p^* - z_\mu|}$$

Чтобы ρ было действительным, должно выполняться соотношение

$$\operatorname{arctg} \frac{c_0}{a_0} - \operatorname{arctg} \frac{d_0}{b_0} - \varepsilon + \sum_1^n \varphi_\nu - \sum_1^m \psi_\mu = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \dots, \quad (8)$$

называемое основным фазовым уравнением.

Величины $\operatorname{arctg} \frac{c_0}{a_0}$ и $\operatorname{arctg} \frac{d_0}{b_0}$, входящие в уравнение (8), характеризуются соотношением между степенями полиномов $\Phi_n(p)$, $H_s(p)$, $\Psi_m(p)$, $\theta_l(p)$ уравнения (1) и знаками коэффициентов при старших степенях p .

Принимая во внимание (8), имеем формулу для вычисления параметра траекторий корней:

$$\rho_1 = \frac{\prod_1^n |p^* - p_\nu|}{\prod_1^m |p^* - z_\mu|} (-1)^{N+1}, \quad N = 0, \pm 1, \dots, \quad (9)$$

где $\rho_1 = \frac{\sqrt{b_0^2 + d_0^2}}{\sqrt{a_0^2 + c_0^2}} \rho$ — приведенный параметр. При нечетных значениях N $\rho > 0$, при четных значениях N параметр траекторий $\rho < 0$.

Рассмотрим асимптотические свойства корневых годографов, определяющие поведение $(n-m)$ корней характеристического уравнения (1). Центр звезды асимптот находится по формуле, приведенной в работе [1]:

$$a^* = \frac{\sum_1^n p_\nu - \sum_1^m z_\mu}{n-m}. \quad (10)$$

Здесь n — число корней уравнения $\Phi_n + jH_s = 0$, а m — число корней уравнения $\Psi_m + j\theta_l = 0$.

Найдем углы наклона асимптот к действительной оси. Для бесконечно удаленных точек траекторий ($\rho \rightarrow \pm\infty$) углы φ_ν и ψ_μ будут практически равными, и основное фазовое уравнение (8) в этом предельном случае представится в виде

$$\operatorname{arctg} \frac{c_0}{a_0} - \operatorname{arctg} \frac{d_0}{b_0} - \varepsilon + (n-m)\varphi_N = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \dots$$

Откуда

$$\varphi_N = \frac{N\pi + \varepsilon - \operatorname{arctg} \frac{c_0}{a_0} + \operatorname{arctg} \frac{d_0}{b_0}}{n-m}, \quad N = 0, \pm 1, \dots \quad (11)$$

Таким образом, звезда асимптот оказывается повернутой относительно оси δ на угол

$$\varphi_0 = \frac{\varepsilon - \operatorname{arctg} \frac{c_0}{a_0} + \operatorname{arctg} \frac{d_0}{b_0}}{n-m}. \quad (12)$$

Заметим, что при $n=m$ траектории корней не имеют асимптот.

Все вышеизложенное относится к случаю $n=s$ и $m=l$. Для других соотношений n и s , m и l также справедливы формулы (8), (9), (10), (11), но вид их упрощается. Действительно, пусть $n>s$, а $m>l$. Это означает, что в уравнении (5) коэффициенты при старшей степени p будут a_0 для первого слагаемого и b_0 для второго. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\sum_1^n \varphi_\nu - \sum_1^m \psi_\mu - \varepsilon = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \dots,$$

а приведенный параметр траекторий $\rho_1 = \rho \frac{b_0}{a_0}$. Соотношения для других возможных случаев приводятся в приложении.

Таким образом, пользуясь асимптотическими свойствами геометрического метода, основным фазовым уравнением и формулой параметра, можно построить траектории корней для уравнений с комплексными коэффициентами любого порядка и прокалибровать корневой годограф по параметру траекторий ρ .

Перейдем к аналитическому выводу уравнения траекторий корней и формул параметра. Для этого, как обычно, выделим в выражениях (2) для Φ_n , H_s , Ψ_m , θ_l действительную и мнимую части, подставляя $p = \delta + j\omega$:

$$\begin{aligned} \Phi_n(p) &= \Phi_r(\delta, \omega) + j\omega\Phi_j(\delta, \omega), \\ H_s(p) &= H_r(\delta, \omega) + j\omega H_j(\delta, \omega), \\ \Psi_m(p) &= \Psi_r(\delta, \omega) + j\omega\Psi_j(\delta, \omega), \\ \theta_l(p) &= \theta_r(\delta, \omega) + j\omega\theta_j(\delta, \omega). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \Phi_n(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \Phi_n''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Phi_n^{IV}(\delta) - \dots, \\ \Phi_j &= \Phi_n'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Phi_n'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Phi_n^V(\delta) - \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогично записываются H_r , H_j , Ψ_r , Ψ_j , θ_r , θ_j . Подставляя (13) в уравнение (1) и приравнявая нулю действительную и мнимую части, получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} (\Phi_r - \omega H_j) + \rho [(\Psi_r - \omega \theta_j) \cos \varepsilon - (\theta_r + \omega \Psi_j) \sin \varepsilon] &= 0, \\ (H_r + \omega \Phi_j) + \rho [(\theta_r + \omega \Psi_j) \cos \varepsilon + (\Psi_r - \omega \theta_j) \sin \varepsilon] &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Исключая свободный параметр ρ (параметр траектории) из уравнений (15), подставляя в него (14) и собирая члены с одинаковыми степенями ω , запишем уравнение траекторий корней

$$\begin{aligned} & [(\Phi_n \theta_l - H_s \Psi_m) \cos \varepsilon + (\Phi_n \Psi_m + H_s \theta_l) \sin \varepsilon] - \\ & - \omega^2 \left\{ \left[\left(\frac{\Phi_n \theta_l'}{0! 2!} - \frac{\Phi_n' \theta_l'}{1! 1!} + \frac{\Phi_n'' \theta_l}{2! 0} \right) - \left(\frac{H_s \Psi_m''}{0! 2!} - \frac{H_s' \Psi_m'}{1! 1!} + \frac{H_s'' \Psi_m}{2! 0!} \right) \right] \cos \varepsilon + \right. \\ & + \left. \left[\left(\frac{\Phi_n \Psi_m''}{0! 2!} - \frac{\Phi_n' \Psi_m'}{1! 1!} + \frac{\Phi_n'' \Psi_m}{2! 0!} \right) + \left(\frac{H_s \theta_l''}{0! 2!} - \frac{H_s' \theta_l'}{1! 1!} + \frac{H_s'' \theta_l}{2! 0!} \right) \right] \sin \varepsilon \right\} + \dots + \\ & + \omega \{ [(\Phi_n \Psi_m' - \Phi_n' \Psi_m) + (H_s \theta_l' - H_s' \theta_l)] \cos \varepsilon + [(H_s \Psi_m' - H_s' \Psi_m) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\Phi_n \theta'_l - \Phi'_n \theta_l) \sin \varepsilon \} - \omega^3 \left\{ \left[\left(\frac{\Phi_n \Psi_m'''}{0! 3!} - \frac{\Phi'_n \Psi_m''}{1! 2!} + \frac{\Phi''_n \Psi'_m}{2! 1!} - \frac{\Phi'''_n \Psi_m}{3! 0!} \right) + \right. \right. \\
& \quad + \left. \left(\frac{H_s \theta_l'''}{0! 3!} - \frac{H'_s \theta_l''}{1! 2!} + \frac{H''_s \theta'_l}{2! 1!} - \frac{H'''_s \theta_l}{3! 0!} \right) \right] \cos \varepsilon + \\
& \quad + \left[\left(\frac{H_s \Psi_m'''}{0! 3!} - \frac{H'_s \Psi_m''}{1! 2!} + \frac{H''_s \Psi'_m}{2! 1!} - \frac{H'''_s \Psi_m}{3! 0!} \right) - \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\frac{\Phi_n \theta_l'''}{0! 3!} - \frac{\Phi'_n \theta_l''}{1! 2!} + \frac{\Phi''_n \theta'_l}{2! 1!} - \frac{\Phi'''_n \theta_l}{3! 0!} \right) \right] \sin \varepsilon \right\} + \dots = 0. \quad (16)
\end{aligned}$$

Здесь Φ_n , H_s , Ψ_m , θ_l являются функциями δ и дифференцирование производится по δ .

В уравнение (16) входят четные и нечетные степени ω , поэтому в общем случае решение данного уравнения довольно сложно. Из уравнений (15) находим формулы для вычисления параметра траекторий ρ :

$$-\rho = \frac{\Phi_r - \omega H_j}{(\Psi_r - \omega \theta_j) \cos \varepsilon - (\theta_r + \omega \Psi_j) \sin \varepsilon} = \frac{H_r + \omega \Phi_j}{(\theta_r - \omega \Psi_j) \cos \varepsilon + (\Psi_r - \omega \theta_j) \sin \varepsilon}. \quad (17)$$

При $\delta=0$ из уравнений (16) и (17) можно определить критические частоты $\omega_{кр}$ и соответствующие им критические значения параметра траекторий $\rho_{кр}$.

Из уравнения (16) следует, что действительная ось не является траекторией корней. Положив в уравнении траекторий корней $\omega=0$, получим уравнение, определяющее точки пересечения корней с действительной осью:

$$(\Phi_n \theta_l - H_s \Psi_m) \cos \varepsilon + (\Phi_n \Psi_m + H_s \theta_l) \sin \varepsilon = 0. \quad (18)$$

Очевидно, что это уравнение не совпадает с уравнением кратных точек, как это имело место для характеристического уравнения с действительными коэффициентами

$$\Phi_n(\rho) + \rho \Psi_m(\rho) = 0.$$

Уравнение возможных кратных точек получается из системы двух уравнений: характеристического уравнения и его производной по ρ . Из рассмотренного следует, что системы, характеристические уравнения которых приводятся к уравнению с комплексными коэффициентами (1), вообще говоря, не имеют решений вида $e^{-\delta t}$, за исключением некоторых точек, определяемых уравнением (18).

Мы рассмотрели ряд свойств траекторий корней уравнений с комплексными коэффициентами на плоскости комплексных частот. Однако такие свойства, как подобие конфигурации траекторий корней при изменении масштаба, независимость траекторий корней от положения мнимой оси, поведение траекторий в кратных точках, являются теми же, как и для уравнений с действительными коэффициентами [1].

В качестве примера, иллюстрирующего применение метода траекторий корней к исследованию уравнений с комплексными коэффициентами, рассмотрим характеристическое уравнение следящей системы антенны радиолокационной станции сопровождения [5]:

$$\rho(\rho + 1)^2 - j a \rho(\rho + 1) + \bar{k} = 0. \quad (19)$$

Здесь a — коэффициент усиления блока перекрестной связи; $\bar{k} = ke^{j\varphi}$, k — коэффициент усиления основного канала; φ — сдвиг фазы между опорным напряжением и сигналом рассогласования. За параметр траекторий корней примем коэффициент усиления основного канала k . Параметры a и φ считаем заданными параметрами семейства траекторий.

Тогда уравнение (19) запишется в виде

$$p(p+1)(p+1-ja) + \bar{k} = 0. \quad (20)$$

В данном случае

$$\Phi_n = p^3 + 2p^2 + p, \quad H_s = -ap^2 - ap,$$

$$\Psi_m = 1, \quad \theta_l = 0, \quad \varepsilon = \varphi.$$

Уравнение траекторий находим по формуле [16]:

$$\begin{aligned} \omega^3 \cos \varphi - \omega^2 [a \cos \varphi + (3\delta + 2) \sin \varphi] + \omega [- (3\delta^2 + 4\delta + 1) \cos \varphi + (2a\delta + a) \sin \varphi] + \\ + [(a\delta^2 + a\delta) \cos \varphi + (\delta^3 + 2\delta^2 + \delta) \sin \varphi] = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Разделив (21) на $\cos \varphi$ и вводя $A = \operatorname{tg} \varphi$, получим

$$\begin{aligned} \omega^3 + \omega^2 [-3\delta A + (-2A - a)] + \omega [-3\delta^2 + (2aA - 4)\delta + (aA - 1)] + [A\delta^3 + (2A + a)\delta^2 + (A + a)\delta] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

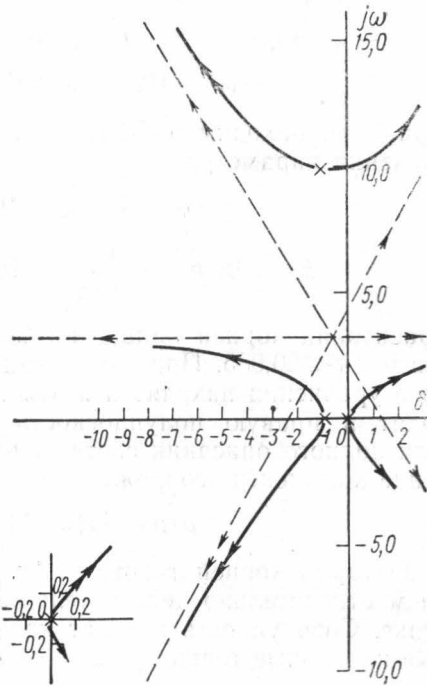


Рис.

Используя (17), напишем формулы для параметра траекторий:

$$\begin{aligned} -k &= \frac{(\delta^3 + 2\delta^2 + \delta) + \omega(2a\delta + a) - \omega^2(3\delta + 2)}{\cos \varphi} = \\ &= \frac{-\omega^3 + a\omega^2 + \omega(3\delta^2 + 4\delta + 1) + (-a\delta^2 - a\delta)}{\sin \varphi} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -k \cos \varphi = -K &= (\delta^3 + 2\delta^2 + \delta) + \omega(2a\delta + a) - \omega^2(3\delta + 2) = \\ &= \frac{-\omega^3 + a\omega^2 + \omega(3\delta^2 + 4\delta + 1) + (-a\delta^2 - a\delta)}{A}. \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть $a=10$ (рекомендации по выбору этого параметра даны в работе [5]) и предположим, что $A = \operatorname{tg} \varphi = -1$, т. е. имеет место сдвиг фазы между опорным напряжением и сигналом рассогласования. Из (20) находим три начальные точки: $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=-1+10j$, обозначенные на рисунке крестами и не имеющие конечных предельных точек ($k = \pm \infty$). Центр звезды асимптот определяется по формуле (10): $a^* = -0,667 + 3,333j$. Углы наклона асимптот к действительной оси равны

$$\varphi_N = \frac{N\pi + \varphi}{3} = \frac{N\pi}{3} - 15^\circ, \quad N = 0, \pm 1, \dots$$

или

$$\varphi_0 = -15^\circ, \quad \varphi_1 = 45^\circ, \quad \varphi_2 = 105^\circ, \dots$$

Уравнение траекторий корней формул параметра находится из (22) и (23):

$$\omega^3 + \omega^2(-3\delta - 8) + \omega(-3\delta^2 - 24\delta - 11) + (-\delta^3 - 8\delta^2 + 9\delta) = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} -k \cos \varphi = -K &= (\delta^3 + 2\delta^2 + \delta) + \omega(20\delta + 10) - \omega^2(3\delta + 2) = \\ &= \omega^3 - 10\omega^2 - \omega(3\delta^2 + 4\delta + 1) + (10\delta^2 + 10\delta). \end{aligned} \quad (25)$$

При $\delta=0$ находим из (24) и (25) критические частоты и критические значения параметра:

$$\omega_{k_1} = 0; \quad \omega_{k_2} = 9,196; \quad \omega_{k_3} = -1,196.$$

$$k_{k_1} = 0; \quad k_{k_2} = \frac{K_{k_2}}{\cos \varphi} = 109,009; \quad k_{k_3} = \frac{K_{k_3}}{\cos \varphi} = 20,935.$$

Траектории корней приведены на рисунке. Система устойчива в области $0 < k < 20,935$. При изменении k от нуля до $k_k = 20,935$ корни исходного уравнения находятся в левой полуплоскости, а при $k_k > 20,935$ выходят в правую полуплоскость, и система становится неустойчивой. Для полного описания системы необходимо также рассматривать уравнение комплексно-сопряженное уравнению (20) ($\alpha=10$)

$$p(p+1)[p+1+10j] + ke^{-j\varphi} = 0.$$

Траектории корней такого уравнения являются зеркальным отображением относительно действительной оси траекторий, построенных на рисунке. Совокупность их дает корневой годограф системы (действительные начальные точки при этом становятся двойными).

Приложение

Основные формулы для характеристического уравнения с комплексными коэффициентами были выведены для случая, когда $n=s$, $m=l$. Однако возможны и другие соотношения между степенями полиномов n и s , m и l , для которых также справедливы уравнения (8), (9), (10), (11), но вид их значительно упрощается. Перечислим эти случаи и уравнения к ним.

$n > s$, $m > l$. Основное фазовое уравнение (8) имеет вид:

$$\sum_1^n \varphi_\nu - \sum_1^m \psi_\mu - \varepsilon = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \dots$$

Приведенный параметр $\rho_1 = \frac{kb_0}{a_0}$.

$n > s$, $m = l$. Основное фазовое уравнение:

$$-\arctg \frac{d_0}{b_0} - \varepsilon + \sum_1^n \varphi_\nu - \sum_1^m \psi_\mu = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \dots$$

Приведенный параметр $\rho_1 = \frac{k\sqrt{b_0^2 + d_0^2}}{a_0}$.

$n > s, m < l$. Основное фазовое уравнение:

$$-\frac{\pi}{2} - \varepsilon + \sum_1^n \varphi_\nu - \sum_1^l \psi_\mu = N\pi, N = 0, \pm 1, \dots$$

Приведенный параметр $\rho_1 = \frac{\rho d_0}{a_0}$,

$n = s, m > l$. Основное фазовое уравнение:

$$\operatorname{arctg} \frac{c_0}{a_0} - \varepsilon + \sum_1^n \varphi_\nu - \sum_1^m \psi_\mu = N\pi, N = 0, \pm 1, \dots$$

Приведенный параметр $\rho_1 = \frac{\rho b_0}{\sqrt{a_0^2 + c_0^2}}$.

$n = s, m < l$. Основное фазовое уравнение:

$$\operatorname{arctg} \frac{c_0}{a_0} - \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \sum_1^n \varphi_\nu - \sum_1^l \psi_\mu = N\pi, N = 0, \pm 1, \dots$$

Приведенный параметр $\rho_1 = \frac{\rho d_0}{\sqrt{a_0^2 + c_0^2}}$.

$n < s, m > l$. Основное фазовое уравнение:

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon + \sum_1^s \varphi_\nu - \sum_1^m \psi_\mu = N\pi, N = 0, \pm 1, \dots$$

Приведенный параметр $\rho_1 = \frac{\rho b_0}{c_0}$.

$n < s, m = l$. Основное фазовое уравнение:

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{d_0}{b_0} - \varepsilon + \sum_1^s \varphi_\nu - \sum_1^m \psi_\mu = N\pi, N = 0, \pm 1, \dots$$

Приведенный параметр $\rho_1 = \frac{k \sqrt{b_0^2 + d_0^2}}{c_0}$.

$n < s, m < l$. Основное фазовое уравнение:

$$-\varepsilon + \sum_1^s \varphi_\nu - \sum_1^l \psi_\mu = N\pi, N = 0, \pm 1, \dots$$

Приведенный параметр $\rho_1 = \frac{\rho d_0}{c_0}$.

Центр асимптот находится по формулам, аналогичным (10), углы наклона асимптот к действительной оси для каждого случая определяются из соответствующих фазовых уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.

2. Огородникова В. И. Реферат канд. диссертации. МГУ, 1968.
3. Бендриков Г. А., Огородникова В. И. «Автоматика и телемеханика», № 4, 1967.
4. Бендриков Г. А., Огородникова В. И., Сухачева Н. А. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 3, 1970.
5. Красовский А. А. «Автоматика и телемеханика», 18, № 2, 1957.
6. Сухачева Н. А. Общие свойства траекторий корней уравнений с комплексными коэффициентами. Дипломная работа, физфак, МГУ, 1968.
7. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. М., Гостехиздат, 1939.
8. Казамаров А. А., Палатник А. М., Роднянский Л. О. Динамика двумерных систем автоматического регулирования. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
2.11 1970 г.

Кафедра
физики колебаний