Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1971

УДК 530.145

И. М. ТЕРНОВ, В. Г. БАГРОВ, Ю. И. КЛИМЕНКО,
О. С. ПАВЛОВА, В. Р. ХАЛИЛОВ

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В ПЛОСКОЙ ВОЛНЕ МАЛОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

В статье рассматривается в приближении слабых волн вынужденное излучение релятивистских электронов, движущихся в плоской электромагнитной монохроматической волне. Получены выражения для вероятности и полной мощности излучения. Исследованы спиновые эффекты.

В работах [1, 2, 3] было представлено существование эффекта вынужденного излучения электронов, движущихся в плоской электромагнитной волне, а в [3] указывалось на возможность преимущественной ориентации спина электрона в таком процессе. Однако в этих работах предполагалась, что поляризация основной электромагнитной волны круговая[1]. В данной работе мы отказываемся от этого ограничения и проводим расчет процесса для случая слабой электромагнитной волны в самом общем виде.

О вынужденном излучении электрона, движущегося в плоской волне

Имеется электрон, заряд его отрицателен и равен $-e$, движущийся в поле плоской электромагнитной многохроматической волны. Эту волну мы будем называть первой волной. Поскольку монохроматическая волна всегда поляризована по эллипсу [4], то можно так выбрать декартову систему координат, чтобы два единичных вектора координатного репера $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ были направлены по главным осям эллипса поляризации, а третий орт $\vec{n}$ вдоль направления распространения волны. Векторный потенциал первой волны в этом случае можно задать в виде

$$\vec{A}(\xi) = -\frac{\sqrt{2}E_1}{\varkappa_1}(\vec{a}_1\cos\psi\sin\varkappa_1\xi - \vec{a}_2\sin\psi\cos\varkappa_1\xi),$$
$$\xi = ct - (\vec{r}\vec{n}), \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

[1] Такое предположение существенно облегчает вычисления.

Здесь E_1 — среднеквадратичная амплитуда первой волны, угол ψ характеризует поляризацию первой волны[1], волновое число $\varkappa_1$ определяет частоту $\omega_1 = c\varkappa_1$.

Движение электрона в электромагнитной волне (1) будем описывать волновыми функциями, являющимися точными решениями уравнения Дирака [5, 6]:

$$\Psi = N \begin{pmatrix} k_0 + \lambda + (\vec{\sigma}\vec{n})(\vec{\sigma}\vec{\pi}) \\ (k_0 - \lambda)(\vec{\sigma}\vec{n}) + (\vec{\sigma}\vec{\pi}) \end{pmatrix} v \exp[-ic\lambda t + i(\vec{k}\vec{r}) - if(\xi)]),$$

$$(\vec{k}\vec{n}) = 0, \ \vec{\pi} = \vec{k} + \frac{e}{c\hbar}\vec{A}(\xi), \ k_0 = \frac{mc}{\hbar}. \tag{2}$$

В формуле (2) λ и $\vec{k}$ — квантовые числа электрона $\vec{\sigma}$ — двумерные матрицы Паули. Нормировочный множитель N и функция $f\xi$ имеют вид

$$N = \sqrt{2}\{L^3[k^2 + k_0^2(1 + \gamma_1^2) + \lambda^2]\}^{-1/2},$$

$$f(\xi) = \frac{1}{2\lambda}\int(\pi^2 + k_0^2 - \lambda^2)\,d\xi, \ \gamma_1 = \frac{eE_1}{mc^2\varkappa_1}, \tag{3}$$

где L^3 — величина нормировочного объема. Двукомпонентный спинор v подчиняется уравнению

$$(\vec{\sigma}\vec{l})\,v = \zeta v_1 \quad \zeta = \pm 1,$$

где единичный вектор $\vec{l}$ характеризует направление спина электрона [7]. При $\zeta = 1$ спин электрона ориентирован по вектору $\vec{l}$, при $\zeta = -1$ — против вектора $\vec{l}$.

Пусть на электрон падает вторая волна, среднеквадратичная амплитуда которой E_2 и частота $\omega_2 = c\varkappa_2$. Вторая волна распространяется вдоль единичного вектора $\vec{n}_1$:

$$\vec{n}_1 = \vec{s}\sin\theta + \vec{n}\cos\theta, \ \vec{s} = \vec{a}_1\cos\varphi + \vec{a}_2\sin\varphi.$$

Здесь θ и φ — сферические углы вектора $\vec{n}_1$ в системе координат $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{n}$. Параметры первой и второй волн связаны условием $\gamma_1 \gg \gamma_2 = \dfrac{eE_2}{mc^2\varkappa_2}$, так что влияние второй волны на электрон можно учесть по теории возмущений, причем вторую волну считаем квантованной.

Очевидно, возмущающее действие второй волны приведет к вынужденному излучению электрона, движущегося в первой волне. Вероятность этого процесса может быть подсчитана стандартными методами квантовой электродинамики, и расчеты принципиально не отличаются от соответствующих вычислений при рассмотрении спонтанного излучения электронов, движущихся в плоской волне (например, см [6, 7]). Поэтому нет необходимости подробно приводить здесь все математические выкладки. Ограничимся лишь следующими замечаниями.

---

[1] Например, при $\psi = 0, \pm\dfrac{\pi}{2}$ имеем линейно поляризованную волну, а при $\psi = g\dfrac{\pi}{4}$ имеем волну правой ($g = 1$) или левой ($g = -1$) круговой поляризации.

Матричные элементы переходов рассчитываются по точным волновым фракциям (2, 3). При переходе из начального состояния $\vec{k}$, λ, ζ, в конечное $\vec{k}'$, λ', ζ' выполняются законы сохранения:

$$\vec{k} - \vec{k}' - \varepsilon\varkappa_2 \sin\theta\vec{s} = 0,$$

$$\frac{k'^2 + k_0^2(1+\gamma_1^2) - \lambda'^2}{2\lambda'} - \frac{k^2 + k_0^2(1+\gamma_1^2) - \lambda^2}{2\lambda} + \varepsilon\varkappa_2\cos\theta = \varepsilon n\varkappa_1, \tag{4}$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

При $\varepsilon = 1$ идет процесс излучения, т. е. из первой волны электрон поглощает n фотонов частоты $\omega_1 = c\varkappa_1$ и излучает один фотон частоты $\omega_2 = c\varkappa_2$ во вторую волну. Следовательно, при излучении вторая волна усиливается. $\varepsilon = -1$ соответствует поглощению одного фотона частоты ω_2 из второй волны и излучению n фотонов частоты ω_1 в первую волну. При этом первая волна усиливается. Если безразмерные величины γ_1 и γ_2 удовлетворяют условию

$$1 \gg \gamma_1 \gg \gamma_2, \tag{5}$$

то наиболее вероятен однофотонный процесс ($n=1$). Именно условия (5) могут быть в настоящее время реализованы экспериментально, и поэтому все дальнейшее рассмотрение проводится в предположении справедливости (5).

Отметим, что соответствующим выбором лоренцевой системы координат можно добиться выполнения равенства $\vec{k}=0$; будем считать, что выбрана именно такая система координат.

Вероятность и полная мощность вынужденного излучения электрона

Простые, но громоздкие расчеты, выполненные в указанных выше приближениях, приводят к следующим общим выражениям для вероятности индуцированного излучения в единицу времени для одного электрона:

$$w = \frac{\tau_0^{-1}\gamma_1^2\gamma_2^2 G\,(l_2S_2 - \varepsilon e_3S_3\,l)^2}{4\,(k_0^2+\lambda^2)\,(k_0^2+\lambda'^2+\varkappa_2^2\sin^2\theta}, \qquad \tau_0 = \frac{\hbar}{mc^2},$$

$$S_2 = \frac{k_0\varkappa_2}{\varkappa_1\lambda'}\,[k_0(\lambda-\lambda')(\vec{\vec{\sigma}}\vec{s}) + \varepsilon\lambda\varkappa_2\sin\theta\,(\vec{\vec{\sigma}}\vec{n})]\,(\vec{b}\vec{s})\sin\theta +$$

$$+ k_0(\lambda'-\lambda)(\vec{\vec{\sigma}}\vec{n})(\vec{b}\vec{s}) - ik_0(\lambda+\lambda')(\vec{n}[\vec{b}\vec{s}])\,\delta_{\zeta\zeta'}, \tag{6}$$

$$S_3 = \frac{k_0\varkappa_2}{\varkappa_1\lambda'}\{(\lambda\lambda' - k_0^2 - \varepsilon\lambda\varkappa_2\cos\theta)\sin\theta\delta_{\zeta\zeta'} + ik_0[(\lambda-\lambda')\cos\theta -$$

$$- \varepsilon\varkappa_2\sin^2\theta](\vec{\vec{\sigma}}[\vec{n}\vec{s}])\}(\vec{b}\vec{s})\sin\theta + k_0[(\lambda+\lambda')\cos\theta + \varepsilon\varkappa_2\sin^2\theta](\vec{b}\vec{s})\,\delta_{\zeta\zeta'} +$$

$$+ ik_0[(\lambda-\lambda')\cos\theta - \varepsilon\varkappa_2\sin^2\theta](\vec{n}[\vec{b}\vec{s}])(\vec{\vec{\sigma}}\vec{n}),$$

$$G = \frac{4\tau\tau_0}{4\,(\tau R)^2 + \tau_0^2}, \qquad R = \frac{1}{k_0}[\lambda - \lambda' - \varepsilon\varkappa_2(1-\cos\theta)].$$

Здесь τ — время жизни начального состояния электрона. Приближенно τ может быть оценено как обратная величина вероятности спонтанного излучения. Параметры l_2 и l_3 характеризуют поляризацию второй волны и их смысл и возможные значения подробно обсуждались, например, в [8, 9]. Комплексный вектор $\vec{b}$ связан с поляризацией первой волны

$$\vec{b} = i\varepsilon\vec{a}_1 \cos\psi - \vec{a}_2 \sin\psi,$$

а среднее значение $\vec{\vec{\sigma}}$ имеет вид (см. [7])

$$\vec{\vec{\sigma}} = \zeta\vec{l}\,\delta_{\zeta_1\zeta'} + [1 - (\vec{l}\vec{n})^2]^{-1/2} \{[\vec{l}\,[\vec{l}\vec{n}]] + i\zeta\,[\vec{l}\vec{n}]\}\,\delta_{\zeta_1 - \zeta'}.$$

Выражения (6) с учетом (4) полностью описывают вероятность вынужденного однофотонного излучения ($\varepsilon = 1$) и поглощения ($\varepsilon = -1$) и удобны для конкретных численных расчетов при заданных условиях эксперимента.

Если в области пересечения первой и второй волны находится не один, а N электронов, то вероятность излучения (6) следует умножить на N.

Усреднение по начальным и суммирование по конечным спинам в формуле (6) приводит к выражению для полной вероятности вынужденного излучения неполяризованного электрона

$$w = \frac{\tau_0^{-1}\gamma_1^2\gamma_2^2 G}{4\,(k_0^2 + \lambda^2)\,(k_0^2 + \lambda'^2 + \varkappa_2^2 \sin^2\theta)} \,(l_2^2 Q_2 + l_3^2 Q_3 - \varepsilon l_2 e_3 Q_l),$$

$$Q_2 = \alpha \left\{ \frac{k_0^4\varkappa_2^2\,(\lambda - \lambda')^2}{\varkappa_1^2\lambda'^2} \sin^2\theta + \left[\varepsilon\,\frac{k_0\lambda\varkappa_2^2}{\varkappa_1\lambda'} \sin^2\theta + \right.\right.$$

$$\left.\left. + k_0\,(\lambda' - \lambda) \right]^2 - k_0^2\,(\lambda + \lambda')^2 \right\} + k_0^2\,(\lambda + \lambda')^2,$$

$$Q_3 = \alpha \left[(\lambda\cdot\lambda' - k_0^2 - \varepsilon\lambda\varkappa_2 \cos\theta)\,\frac{k_0\varkappa_2}{\varkappa_1\lambda'} \sin^2\theta + k_0\,(\lambda + \lambda')\cos\theta + \varepsilon k_0\varkappa_2 \sin^2\theta \right]^2 +$$

$$+ k_0^2\,[(\lambda - \lambda')\cos\theta - \varepsilon\varkappa_2 \sin^2\theta]^2 \left(1 - \alpha + \alpha\,\frac{k_0^2\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2\lambda'^2} \sin^2\theta \right), \tag{7}$$

$$Q_l = k_0^2 \left\{ (\lambda + \lambda') \left[\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1\lambda'}\,(\lambda\lambda' - k_0^2 - \varepsilon\lambda\varkappa_2 \cos\theta) \sin^2\theta + \right.\right.$$

$$\left. + (\lambda + \lambda')\cos\theta + \varepsilon\varkappa_2 \sin^2\theta \right] - [(\lambda + \lambda')\cos\theta - \varepsilon\varkappa_2 \sin^2\theta] \times$$

$$\left. \times \left[\lambda' - \lambda + \frac{\varepsilon\lambda\varkappa_2^2}{\lambda'\varkappa_1} \sin^2\theta \right] \right\} \sin 2\psi,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2\psi \cos 2\varphi).$$

Полная мощность излучения получается из (6, 7) умножением вероятности на величину $c\hbar(\lambda - \lambda' + \varepsilon\varkappa_2\cos\theta)$ (об этом см. [1]). Если точные оценки вероятности и мощности излучения удобно проводить, исходя из выражений (6, 7), то для качественного анализа эти формулы слишком сложны.

Они могут быть существенно упрощены, если заметить, что функция G в (6) и (7) практически отлична от нуля лишь в малой области значений параметров, лежащей около точки $R=0$. Поэтому с достаточной степенью точности можно считать, что основной вклад в вероятность вносят лишь те переходы, для которых квантовые числа конечного состояния электрона удовлетворяют, помимо (4), условию $R=0$, т. е.

$$\lambda - \lambda' - \varepsilon \varkappa_2 (1 - \cos\theta) = 0. \tag{8}$$

Совместное решение уравнений (4) и (8) приводит к выводу, что такой процесс идет лишь в случае, если $\varkappa_2$ связана с $\varkappa_1$ формулой Комптона:

$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 (1 + \beta_3 \cos\theta')}{(1 + \beta_3)\,[1 + \varepsilon p\,(1 - \cos\theta')]}, \quad p = \frac{\varkappa_1}{k_0} \sqrt{\frac{1 - \beta_3}{1 + \beta_3}}, \tag{9}$$

где $c\beta_3$ — скорость движения электрона вдоль вектора $\vec{n}$, причем λ может быть выражено через β_3 соотношением

$$\lambda = k_0 \sqrt{\frac{1 - \beta_3}{1 + \beta_3}},$$

а угол θ' связан с углом θ преобразованием Лоренца

$$\cos\theta = \frac{\beta_3 + \cos\theta'}{1 + \beta_3 \cos\theta'}.$$

Формулы (7), например, при этом принимают вид

$$w = \frac{\tau_0^{-1} \gamma_1^2 \gamma_2^2 (1 - \beta_3^2)\, G}{16\,[1 + (1 + \beta_3)\, p\,(p + \varepsilon)\,(1 - \cos\theta')]\,[1 + \varepsilon p\,(1 - \cos\theta')]^{-1}} \left\{ l_2^2 \left[4\,(1 - \alpha) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{p^2 (1 - \cos\theta')^2}{1 + \varepsilon p\,(1 - \cos\theta')} \right] + l_3^2 \left[4\alpha \cos^2\theta' + \frac{p^2 (1 - \cos\theta')^2}{1 + \varepsilon p\,(1 - \cos\theta')} \right] - 4 l_2 l_3 \cos\theta' \sin 2\psi \right\}, \tag{10}$$

а мощность излучения получается умножением вероятности (10) на $\varepsilon c\hbar\varkappa_2$. Очевидно, что формулы (9, 10) имеют смысл лишь при условии $2p \ll 1$, т. е. вдали от резонанса, когда применима теория возмущений.

Численные оценки показывают, что наблюдение эффекта индуцированного излучения вполне возможно в настоящее время при использовании мощных лазерных пучков света.

Поведение спина электрона при вынужденном излучении

Из общей вероятности процесса (6) можно выделить часть, соответствующую вероятности переходов с переориентацией спина (т. е. переходы, при которых $\zeta' = -\zeta$). Оказывается, что вероятность таких переходов зависит от ζ, т. е. от начальной (или конечной) ориентации спина. Подобный эффект был обнаружен ранее в синхронном излучении [10, 11] и было показано, что такая зависимость вероятности переворота спина от его начальной ориентации приводит к тому, что спин электронов, вначале неполяризованных, приобретает некоторое преимущественное направление, т. е. электроны поляризуются. Вероятность переворота спина определяет степень поляризации электронного пучка [10, 11].

Простой анализ показывает, что эффект будет максимальным, если вектор спина $\vec{l}$ электрона направлен по $\vec{n}$, т. е. $\vec{l}=\vec{n}$. В этом случае из (6) для вероятности w_1 переходов с переворотом спина получаем:

$$w_1 = \frac{\tau_0^{-1}\gamma_1^2\gamma_2^2 G\alpha k_0^4 \varkappa_2^2 \sin^2\theta}{4(\lambda^2+k_0^2)(k_0^2+\lambda'^2+\varkappa_2^2\sin^2\theta)\lambda'^2\varkappa_1^2}\{l_2(\lambda'-\lambda)-$$

$$-\varepsilon\zeta l_3[(\lambda'-\lambda)\cos\theta+\varepsilon\varkappa_2\sin^2\theta\}]^2.$$

При выполнении условия (8) имеет более простое выражение:

$$w_1 = \frac{\tau_0^{-1}\gamma_1^2\gamma_2^2\alpha(1-\beta_3)^2\varkappa_1^2\sin^2\theta'(1-\cos\theta')^2(l_2+\varepsilon\zeta l_3)^2}{16k_0^2[1+(1+\beta_3)p(p+\varepsilon)(1-\cos\theta')]}. \tag{11}$$

Из (11) следует, что наибольшая степень поляризации и наибольшая вероятность достигаются при круговой поляризации второй волны (в этом случае $l_2=g'l_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $g'=\pm 1$), причем может быть достигнута практически полная поляризация электронов, если во второй волне присутствует частота $\varkappa_2$, соответствующая, согласно (9), лишь одному значению ε (т. е. когда происходит либо только излучение $\varepsilon=1$, либо только поглощения $\varepsilon=-1$). Реализация таких условий вполне возможна в настоящее время, так как требует фиксации частоты с примерной относительной точностью 10^{-6} при работе в оптическом диапазоне. Для не слишком релятивистских электронов вероятность (11) достаточно велика и в принципе, в мощных лазерных пучках возможно получение поляризованных электронов. Оценки показывают, что заметно поляризоваться могут электроны до энергий ~ 50 *Мев*, при более высоких энергиях «время жизни» τ, а с ним и вероятность (11), быстро убывают.

Изложенные результаты показывают, что вынужденное излучение электронов, движущихся в плоской волне, обладает рядом интересных и нетривиальных физических особенностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров В. Г., Халилов В. Р. «Изв. вузов», физика, 9, 50, 1969.
2. Багров В. Г., Клименко Ю. И., Халилов В. Р. ЖЭТФ, 57, 922, 1969.
3. Тернов И. М., Багров В. Г., Павлова О. С., Халилов В. Р. «Изв. вузов», физика, 8, 54, 1970.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., «Наука», 1967.
5. Volkov D. M. Zeit Phys., 94, 250, 1935.
6. Гольдман И. И. ЖЭТФ, 46, 14—12, 1964.
7. Ternov I. M., Bagrov V. G., Khapaev A. M. Ann. Phys., 22, 25, 1968.
8. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958.
9. Синхротронное излучение. Сборник статей. М., «Наука», 1966.
10. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, 153, 1053, 1963.
11. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 62, 1964.

Поступила в редакцию
18.11 1970 г.

Кафедра
теоретической физики