

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 — 1971

УДК 621.373.2

А. С. КОВАЛЕНКО

## МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СИНХРОНИЗАЦИИ ТОМСОНОВСКИХ СИСТЕМ

Задача о действии малой внешней синусоидальной э.д.с. на автоколебательную систему томсоновского типа рассмотрена приближенно в двух предельных случаях (при «жестком» и «мягком» ограничении амплитудных отклонений от равновесного значения, равно амплитуде свободных автоколебаний). Результаты расчетов подтверждены экспериментально.

### Введение

Теоретическое исследование явления синхронизации автоколебаний томсоновских систем малой внешней синусоидальной э.д.с. проводится обычно на основе метода медленно меняющихся амплитуд [1]. Получаемые укороченные уравнения в общем случае проинтегрировать не удается, что затрудняет изучение нестационарных режимов. В настоящей работе излагаются методы построения приближенного решения задачи о действии малой внешней синусоидальной э.д.с. на систему томсоновского типа.

В качестве простейшего примера рассматриваем ламповый генератор с контуром в цепи сетки, на который действует малая внешняя э.д.с.  $E \cos p t$  с частотой  $p$ , близкой к частоте свободных автоколебаний  $\omega_0$ . Колебания напряжения на емкости колебательного контура генератора описываются нелинейным дифференциальным уравнением, которое мы запишем в безразмерном виде

$$\ddot{x} + x = 2\xi x + 2\theta(x) \dot{x} + 2\lambda \cos \tau. \quad (1)$$

Рассматриваемая система близка к линейной консервативной ( $|\theta(x)|_{\max} \ll 1$ ); частота воздействия близка к частоте свободных автоколебаний ( $|\xi| \ll 1$ ), амплитуда воздействия мала ( $\lambda \ll 1$ ). Решение ищем в виде  $x = A \sin(\tau - \varphi)$ , где  $A$  и  $\varphi$  — медленные функции времени. Если малые возмущения в правой части уравнения (1) одного порядка:

$$|\theta(x)|_{\max} \sim \lambda \sim |\xi| \sim \mu \ll 1, \quad (2)$$

процессы в системе в первом приближении описываются укороченными уравнениями

$$\dot{A} = \theta(A) A + \lambda \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \xi - \frac{\lambda}{A} \sin \varphi. \quad (3)$$

Рассмотрим некоторые пути построения приближенного решения системы (3), развитые на основании изучения процессов установления синхронного режима, проведенного в работе [2].

### § 1. Случай «жесткого» ограничения амплитудных отклонений

Имея в виду реальные физические системы, конкретизируем вид нелинейной функции  $\theta(A)$ . Полагаем, что в окрестности равновесной амплитуды  $A_0$  функция  $\theta(A)$  меняется плавно, т. е. в разложении

$$\theta(A) = \left. \frac{\partial \theta}{\partial A} \right|_{A_0} d + \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial A^2} \right|_{A_0} d^2 + \dots, \quad d = A - A_0$$

можно ограничиться первым членом.

Следуя работе [2], считаем, что амплитудные отклонения от равновесного значения ограничены жестко, если

$$|\theta(A + \Delta A)| \gg |\xi| \quad \text{для} \quad |\Delta A| \sim A_0.$$

При выполнении условия (2) в системе быстро (за время  $\tau_0 \sim \frac{1}{|\theta(A)|_{\max}} \ll T_\Omega$ , где  $T_\Omega \sim \frac{1}{|\xi|}$  — период биений за пределами области синхронного режима) устанавливаются тем меньшие отклонения  $|d| \ll A_0$ , чем резче меняется  $\theta(A)$  в окрестности  $A_0$ , т. е. чем больше  $\left| \frac{\partial \theta}{\partial A} \right|_{A_0}$ .

Отклонение  $d$  удовлетворяет соотношению

$$|\theta(A_0 + d)| \sim |\xi|.$$

Пренебрегая малым временем  $\tau_0$  установления малых отклонений  $|d| \ll A_0$  и разлагая уравнения (3) по степеням  $d$ , получаем в первом приближении

$$d = \left| \frac{\partial \theta}{\partial A} \right|_{A_0} A_0 d + \lambda \cos \varphi, \quad (4')$$

$$\dot{\varphi} = \xi - \frac{\lambda}{A_0} \sin \varphi. \quad (4'')$$

При малых воздействующих силах  $\left( \frac{\lambda}{|\theta(A)|_{\max}} \ll 1 \right)$  решение укороченных уравнений (3) впервые было получено Р. В. Хохловым [3]. При построении решения было принято [3, 4], что отклонения амплитуды в рассматриваемом случае малы  $\left( \frac{|d|}{A_0} \sim \frac{\lambda}{|\theta(A)|_{\max}} \right)$  и  $\left| \frac{\partial \theta}{\partial A} \right|_{A_0} A_0 \gg \lambda$ , что справедливо для большинства реальных систем, поскольку по отношению к достаточно малым воздействующим силам реальные устойчивые автоколебательные системы ограничивают амплитудные отклонения жестко.

Пренебрегая малой поправкой  $d$  к амплитуде  $A_0$ , решение системы (1) в первом приближении запишем в виде

$$x = A_0 \sin(\tau - \varphi).$$

В этом выражении фаза  $\varphi = \varphi(\tau)$  определена уравнением (4''), которое легко проинтегрировать. Малую поправку  $d$  к амплитуде колебаний находим далее путем интегрирования уравнения (4')<sub>2</sub>, в котором принимаем  $\varphi = \varphi(\tau)$ .

Синхронный режим ( $\varphi(\tau) \rightarrow \text{const}$ ) наступает, как следует из системы (4), при

$$|\xi| \leq \xi_0 = \frac{\lambda}{A_0}. \quad (5)$$

На границе области синхронизации амплитуда установившихся колебаний с точностью до членов второго порядка малости равна амплитуде свободных автоколебаний, фаза  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Вне области синхронизации биения имеют сложный спектральный состав. Зная закон изменения фазы  $\varphi(\tau)$  (после интегрирования фазового уравнения), для расстройк  $|\xi| > \xi_0$  легко рассчитать частоту биений  $\Omega$  и спектральные составляющие колебания  $x = A_0 \sin[\tau - \varphi(\tau)]$

$$\Omega = \xi_0 \sqrt{\sigma^2 - 1},$$

$$x = B_0 \sin(\tau - \psi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \{B_n \sin[(1 + n\Omega)\tau - \psi_n^+] + C_n \sin[(1 - n\Omega)\tau - \psi_n^-]\}. \quad (6)$$

В разложении Фурье (6) колебания  $x$  амплитуды спектральных компонентов  $B_0$ ,  $B_n$  и  $C_n$  определены выражениями

$$g_0 = \frac{B_0}{A_0} = |\sigma| \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma^2}}\right),$$

$$g_n^+ = \frac{B_n}{A_0} = \begin{cases} 0 & \xi > 0 \\ 2 \sqrt{\sigma^2 - 1} |\beta|^{n'}, & \xi < 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$g_n^- = \frac{C_n}{A_0} = \begin{cases} 2 \sqrt{\sigma^2 - 1} |\beta|^{n'}, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Здесь  $\sigma = \frac{\xi\tau}{\xi_0}$ ,  $\beta = \sigma \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma^2}}\right)$ .

Учет малых изменений амплитуды в режиме биений приводит к незначительному, тем меньшему, чем жестче ограничены амплитудные отклонения, количественному изменению спектра колебаний по сравнению с (7) (качественное различие заключается в том, что спектр колебания не «односторонний», т. е.  $g_n^+ \neq 0$  для  $\xi > 0$ ,  $g_n^- \neq 0$  для  $\xi < 0$ ).

## § 2. Системы с «мягким» ограничением амплитудных отклонений

Здесь мы рассматриваем системы, в которых отклонения амплитуды  $A$  от равновесного значения  $A_0$  ограничены слабо и могут быть большими. Это происходит в результате того, что эффективное затухание  $\theta(A)$  мало

$$|\theta(A_0 + \Delta A)| \ll |\xi| \quad (8)$$

для достаточно больших отклонений  $|\Delta A|$ .

Перепишем исходные укороченные уравнения (3) в декартовых координатах  $a = A \cos \varphi$ ,  $b = A \sin \varphi$

$$\dot{a} = \theta(a, b)a - \xi b + \lambda, \quad \dot{b} = \theta(a, b)b + \xi a. \quad (9)$$

Рассматривая не слишком малые расстройки  $|\xi| \sim \lambda$ , введем малый параметр  $\mu \ll \varepsilon \ll 1$ , характеризующий малость эффективного затухания в системе  $|\theta(A)|_{\max} \sim \varepsilon |\xi|$ .

Введем обозначение  $\theta(A) = \varepsilon \delta(A)$ , где  $|\delta(A)| \sim |\xi|$ .

Уравнения (9) переписутся следующим образом:

$$\dot{a} = \varepsilon \delta(a, b)a - \xi b + \lambda, \quad \dot{b} = \varepsilon \delta(a, b)b + \xi a. \quad (10)$$

Система (10) близка к линейной консервативной. Действительно, в нулевом приближении ( $\varepsilon = 0$ ) получаем

$$\dot{a} = -\xi b + \lambda, \quad \dot{b} = \xi a. \quad (11)$$

Уравнения (11) описывают вынужденные колебания в линейной консервативной системе

$$a = \gamma \sin(\Omega \tau + \varphi^*), \quad b = \frac{\lambda}{\xi} \gamma \cos(\Omega \tau + \varphi^*), \quad (12)$$

где  $\Omega = |\xi|$ ,  $\gamma$  — амплитуда собственных колебаний; в нулевом приближении не определена.

Подстановка (12) в нелинейную функцию  $\delta(a, b)$  приводит к появлению в правой части (10) возмущающих членов с частотами  $n\Omega$ . Поскольку отличие точного решения от приближенного мало, представим искомое решение в виде ряда

$$a = \tilde{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n \Omega \tau + \beta_n \sin n \Omega \tau + r_n \cos n \Omega \tau - S_n \sin n \Omega \tau), \quad (13)$$

$$b = \tilde{b} - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin n \Omega \tau - \beta_n \cos n \Omega \tau - r_n \sin n \Omega \tau - S_n \cos n \Omega \tau).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_n &= B_n \cos \varphi_n, & r_n &= C_n \cos \psi_n, & \tilde{a} &= \tilde{A} \cos \tilde{\varphi}, \\ \beta_n &= \beta_n \sin \varphi_n, & S_n &= C_n \sin \psi_n, & \tilde{b} &= \tilde{A} \sin \tilde{\varphi}, \\ \alpha_n &\sim \beta_n \sim \varepsilon^n, & r_n &\sim S_n \sim \varepsilon^{n-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляем (13) в нелинейную функцию  $\delta(a, b)$  и разлагаем ее в ряд Фурье по частотам  $n\Omega$ :

$$\delta(a, b) = \Delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta_n^c \cos n \Omega \tau + \Delta_n^s \sin n \Omega \tau), \quad (15)$$

где  $\Delta_0$ ,  $\Delta_n^c$ ,  $\Delta_n^s$  есть ряды по степеням  $\varepsilon$ .

Искомое решение (13) подставляем в (10) и учитываем (15). Поскольку амплитуды искомых колебаний в системе, близкой к линейной

консервативной, меняются медленно, оставаясь практически постоянными в течение времени  $\tau^* \sim T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}$  (где  $\Omega \approx |\xi|$  вне области синхронного режима есть частота биений), применяем принцип гармонического баланса и получаем систему дифференциальных уравнений относительно искомым медленно меняющихся амплитуд  $\tilde{a}, \tilde{b}, \alpha_m, \beta_m, r_m, S_m, m=1, 2, \dots$  которую решаем затем, введя явно параметр  $\varepsilon$ , методом последовательных приближений.

### § 3. Применение изложенного способа интегрирования укороченных уравнений

Рассматриваем систему с мягким ограничением амплитудных отклонений, эффективное затухание в которой имеет вид

$$\theta(a, b) = v_0 + \frac{1}{4} v_2 (a^2 + b^2). \quad (16)$$

Ограничим искомое решение членами порядка  $\varepsilon^2$ :

$$\begin{aligned} a &= \tilde{a} + (\alpha_1 + r_1) \cos \Omega\tau + (\beta_1 - S_1) \sin \Omega\tau + \\ &\quad + (\alpha_2 + r_2) \cos 2\Omega\tau + (\beta_2 - S_2) \sin 2\Omega\tau, \\ b &= \tilde{b} - (\alpha_1 - r_1) \sin \Omega\tau + (\beta_1 + S_1) \cos \Omega\tau - \\ &\quad - (\alpha_2 - r_2) \sin 2\Omega\tau + (\beta_2 + S_2) \cos 2\Omega\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Получаем систему дифференциальных уравнений относительно амплитуд  $\tilde{a}, \tilde{b}, \alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, r_{1,2}, S_{1,2}$ , которую решаем методом последовательных приближений.

Нулевое приближение,  $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}} &= -\xi \tilde{b} + \lambda \\ \dot{\tilde{b}} &= \xi \tilde{a} \quad \tilde{a}_0 = 0; \quad \tilde{b}_0 = \frac{\lambda}{\xi}; \\ \dot{r}_1 &= -(\xi - \Omega) S_1 \quad r_{10} \neq 0; \quad S_{10} \neq 0; \\ \dot{S}_1 &= (\xi - \Omega) r_1 \quad \Omega = \xi. \end{aligned} \quad (18)$$

Первое приближение,  $\varepsilon \neq 0, \varepsilon^m = 0, m = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}_1 &= -\xi \tilde{b}_1 + \lambda, \\ \dot{\tilde{b}}_1 &= \left[ v_0 + \frac{1}{4} v_2 (\tilde{A}_0^2 + 2c_0^2) \right] \tilde{b}_0 + \xi \tilde{a}_1, \\ \dot{\alpha}_{11} &= -\frac{1}{4} v_2 \tilde{b}_0^2 r_{10} - 2\xi \beta_{11}, \\ \dot{\beta}_{11} &= \frac{1}{4} v_2 \tilde{b}_0^2 S_{10} + 2\xi \alpha_{11}, \\ \dot{r}_{11} &= \left[ v_0 + \frac{1}{4} v_2 (c_{10}^2 + 2\tilde{A}_0^2) \right] r_{10} - (\xi - \Omega) S_{10}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\dot{S}_{11} = \left[ v_0 + \frac{1}{4} v_2 (c_{10}^2 + 2\tilde{A}_0^2) \right] S_{10} + (\xi - \Omega) v_{10}.$$

Здесь

$$\tilde{A}_0^2 = \tilde{a}_0^2 + \tilde{b}_0^2,$$

$$c_{10}^2 = r_{10}^2 + \rho_{10}^2,$$

$$|\xi| \sim \lambda.$$

В системе устанавливается одночастотный вынужденный режим, если

$$\tilde{A}_0^2 \geq -2 \frac{v_0}{v_2} = \frac{1}{2} A_0^2, \quad (20)$$

где  $A_0$  — амплитуда свободных автоколебаний.

Расстройка, соответствующая границе области синхронного режима

$$\tilde{A}_0^2 = \left( \frac{\lambda}{\xi_{\text{гр}}} \right)^2 = \frac{1}{2} A_0^2,$$

$$\xi_{\text{гр}} = \sqrt{2} \xi_0, \quad \text{где } \xi_0 = \frac{\lambda}{A_0}. \quad (21)$$

При выполнении условия (20)  $C_{10} = 0$ ;  $\beta_{11} = 0$ . Время установления синхронного режима при расстройках  $|\xi| \sim \xi_{\text{гр}}$   $|\xi| < \xi_{\text{гр}}$ , определяемое как время гашения собственных колебаний, дается уравнениями в первом приближении (19).

$$\tau_{\text{уст}} \sim \frac{1}{\left| v_0 + \frac{1}{4} v_2 \tilde{A}_0^2 \right|}. \quad (22)$$

При  $|\xi| \ll \xi_0$  ограничение амплитуды происходит аналогично тому, как это имеет место в потенциально автоколебательной системе.

Режим биений  $|\xi| > \xi_{\text{гр}}$ :

$$c_{10}^2 = -4 \frac{v_0}{v_2} - 2\tilde{A}_0^2,$$

$$\tilde{b}_1 = \frac{\lambda}{\xi}, \quad \tilde{a}_1 = -\frac{v_0 + \frac{3}{4} v_2 \tilde{A}_0^2}{\xi} \tilde{b}_0, \quad (23)$$

$$B_{11}^2 = \alpha_{11}^2 + \beta_{11}^2 = \left[ \frac{\frac{1}{4} v_2 \tilde{b}_0^2}{2\xi} - c_{10} \right]^2; \quad \Omega = \xi.$$

Во втором приближении получаем малые поправки к амплитудам спектральных составляющих и к частоте биений, пренебрегая которыми запишем результаты расчетов (для расстроек  $|\xi| > \xi_{\text{гр}}$  в виде

$$g_0 = \frac{\tilde{A}}{A_0} = \frac{1}{|\sigma|},$$

$$g_1^- = \frac{c_1}{A_0} = \sqrt{1 - 2g_0^2}, \quad (24)$$

$$\Omega = \xi_0 \sigma.$$

Как и прежде,  $\sigma = \frac{\xi}{\xi_0}$ ,  $\xi_0 = \frac{\lambda}{A_0}$  (см. (7)).

#### § 4. Экспериментальная часть

Явление синхронизации томсоновских систем при мягком и жестком ограничении амплитудных отклонений экспериментально было изучено на простейшей модели лампового генератора с контуром в цепи сетки. Жесткость установления амплитуды генератора менялась путем изменения обратной связи. Для каждого типа генератора (с большой, с малой жесткостью ограничения амплитудных отклонений) были сняты зависимости эффективного затухания от амплитуды. Эффективное затухание  $\theta(A)$  генератора измерялось следующим образом.

1. Измеряем декремент затухания  $D_0$  линейного резонансного контура генератора при разорванной обратной связи.

$$D_0 = \frac{\Delta f_0}{2f_0} \Delta f_0 \text{ — полоса пропускания контура,} \quad (25)$$

$$f_0 \text{ — резонансная частота его.}$$

2. Вводим в резонансный контур генератора линейное сопротивление  $R$ , которое переводит генератор в потенциально автоколебательный режим.

Измеряем при разорванной обратной связи декремент  $D_1$  полученного контура,  $D_1 = \frac{\Delta f_1}{2f_0}$ .

3. Задаем на полученную потенциально автоколебательную систему внешнее синусоидальное воздействие.

4. Частоту воздействия  $p$  устанавливаем в точности, равной резонансной частоте контура  $f_0$ .

5. Измеряем амплитуды вынужденных колебаний на емкости резонансного контура при включенной ( $A_1$ ) и разорванной ( $A_2$ ) обратной связи.

6. Меняем амплитуду внешнего воздействия и возвращаемся к пункту 4.

7. Строим зависимость эффективного затухания  $\theta(A)$  генератора от амплитуды в соответствии с формулами

$$\theta(A) = D_1 - D_0 - \theta_{п.а.}(A), \quad (26)$$

$\theta_{п.а.}(A)$  — эффективное затухание в потенциально автоколебательной системе, которое для каждого конкретного значения амплитуды  $A_1$  (и  $A_2$ ) рассчитываем по формуле

$$\theta_{п.а.}(A_1) = D_1 \frac{A_2}{A_1}. \quad (27)$$

Эти зависимости приведены на рис. 1, 3. Отметим, что эффективное затухание для генераторов с мягким ограничением амплитуды хорошо аппроксимируется в области действующих значений амплитуд квадратичным двучленом.

Процессы синхронизации наблюдались на экране спектроанализатора. Спектральные компоненты колебаний измерялись ламповым вольтметром. Эксперимент проведен на частоте 21 Мгц.

Результаты экспериментов приведены на рис. 2, 4, где сплошными линиями нанесены теоретические кривые в соответствие с формулами (7), (24).

Разрешающая способность анализатора ( $\approx 5$  кгц) не позволила, к сожалению, измерить амплитуды спектральных компонентов при жестком ограничении амплитуды (рис. 4) в непосредственной близости к границе полосы синхронизации. Однако хорошее количественное сов-

падение для всех «разрешенных» расстроек позволяет судить о полном согласии теории и эксперимента и, следовательно, предполагать, что и для очень малых расстроек вплоть до границы полосы амплитуды спек-

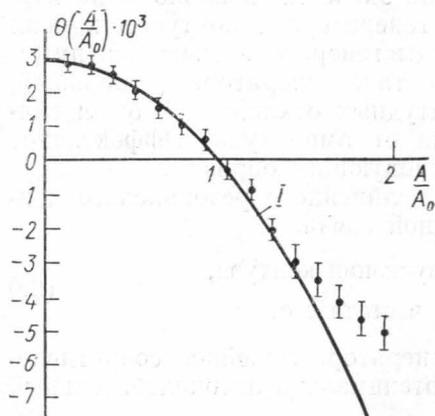


Рис. 1. Зависимость эффективного затухания от амплитуды колебаний для генератора с жестким ограничением ( $I$ )

$$\theta(A) = 3 \cdot 10^{-3} \left[ 1 - \left( \frac{A}{A_0} \right)^2 \right]$$

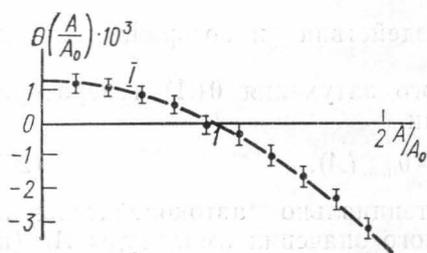


Рис. 3. Зависимость эффективного затухания от амплитуды колебаний для генератора с мягким ограничением ( $I$ )

$$\theta(A) = 1,3 \cdot 10^{-3} \left[ 1 - \left( \frac{A}{A_0} \right)^2 \right]$$

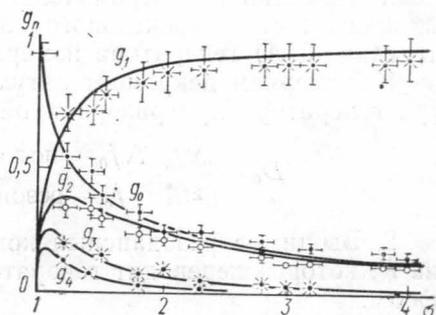


Рис. 2. Жесткое ограничение амплитудных отклонений. Спектральные компоненты колебаний в области биений

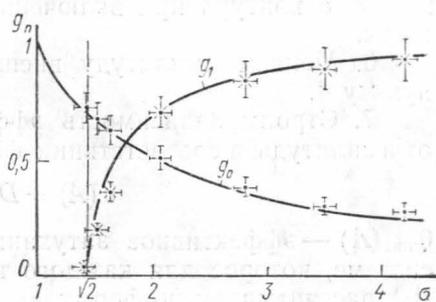


Рис. 4. Мягкое ограничение амплитудных отклонений. Спектральные компоненты колебаний в области биений

ральных составляющих соответствуют приведенным теоретическим кривым (рис. 2).

### Заключение

Процессы, протекающие в генераторе томсоновского типа при действии малой внешней синусоидальной э.д.с., качественно различны в зависимости от характера ограничения амплитудных отклонений. Генераторы с мягким ограничением усредняют, генераторы с жестким ограничением не усредняют амплитуды колебаний по периоду биений.

При этом для мягкого ограничения за пределами области синхронного режима имеют место биения приближенно синусоидальной формы, амплитуда которых стремится к нулю по мере подхода к границе области синхронного режима. Для жесткого ограничения форма биений несинусоидальна. По мере приближения к области синхронного режима их период неограниченно растет, все более резко выступает несинусоидальный характер этих биений.

Эти результаты совпадают с полученными П. А. Рязиным [5], который численно проинтегрировал укороченные уравнения при некотором соотношении параметров изучаемой системы. Изменение формы биений при изменении коэффициентов дифференциальных уравнений, отмеченное П. А. Рязиным, обусловлено тем, что при этом изменялся характер ограничения амплитудных отклонений.

В случае мягкого ограничения амплитудных отклонений на границе области синхронного режима амплитуда гармонических колебаний с частотой воздействия может снижаться до величины  $\frac{A_0}{\sqrt{2}}$  в то время, как в случае жесткого ограничения эта величина практически не отличается от  $A_0$ .

В этих двух предельных случаях можно построить приближенное решение укороченных уравнений.

Реальные системы томсоновского типа с большей или меньшей степенью точности могут быть отнесены к одному из двух рассмотренных крайних случаев.

Независимо от характера ограничения амплитудных отклонений в томсоновских автоколебательных системах, допускающих усреднение затухания по периоду генерируемых колебаний, наступление синхронного режима характеризуется подавлением ранее существовавших автоколебаний и установлением чисто вынужденного колебания.

Работа выполнена под руководством проф. В. В. Мигулина.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капчинский И. М. Методы теории колебаний в радиотехнике. М., Госэнергоиздат, 1954.
2. Мигулин В. В., Коваленко А. С. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., 11, № 3, 1970.
3. Хохлов Р. В. ДАН, 97, 3, 411, 1954.
4. Хохлов Р. В. Реферат докторской диссертации. МГУ, 1961.
5. Рязин П. А. ЖТФ, 5, 38, 1935.

Поступила в редакцию  
26.11 1970 г.

Кафедра  
физики колебаний