Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1971

УДК 530.145

Ю. Г. ПАВЛЕНКО

ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Получено точное решение уравнения Шредингера для заряженной частицы в переменном магнитном поле, закон изменения которого произволен.

В связи с большими математическими трудностями нестационарные задачи квантовой механики решаются в основном приближенными методами. В настоящее время известны лишь точные решения задач об осцилляторе, находящемся под действием внешней силы, собственная частота которого является функцией времени, и заряде в поле плоской монохроматической волны.

Предлагаемая работа посвящена решению уравнения Шредингера для заряженной частицы, движущейся в однородном переменном магнитном поле, величина которого является некоторой функцией времени.

Рассмотрим для определенности движение электрона с зарядом $e=-e_0$ в магнитном поле $\vec{H}(t)$, направленном по оси z. Вектор-потенциал этого поля выберем в виде

$$\vec{A}=\frac{H_0}{2}(-f(t)\,y,\ f(t)\,x,\ 0). \tag{1}$$

Функцию $f(t)$ выберем таким образом

$$f(t)=\begin{cases}1, & t<t'\\ \dfrac{H}{H_0}, & t\to\infty,\end{cases} \tag{2}$$

чтобы магнитное поле изменялось от значения H_0 до H. Предположение о том, что $H(t)$ начинает изменяться лишь с момента $t=t'$, не сказывается на общности полученных результатов.

Изменение напряженности магнитного поля влечет за собой появление индуцированного электрического поля $\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, изменяющего энергию электрона. Из классических уравнений движения, записанных в цилиндрических координатах следует, что в поле (1) интегралами движения являются проекции импульса p_z на ось z и проекция обобщенного момента количества движения на ту же ось

$$M_z = mr^2\dot{\varphi} - \frac{m}{2}\omega_0 r^2 f(t), \quad \omega_0 = \frac{e_0 H_0}{me}.$$

Кинетическая энергия заряда изменяется согласно уравнению

$$\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0}{2} r^2 \dot{\varphi} \dot{f}(t).$$

В силу условия (2) при $t \to \pm\infty$ существуют стационарные состояния, между которыми происходят переходы. При этом не должны изменяться проекции обобщенного момента количества движения l (в единицах $\hbar$) и импульса на ось z. Следовательно, волновую функцию уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla + \frac{e_0}{c}\vec{A}\right)^2\psi \tag{3}$$

следует искать в виде

$$\psi(\vec{r}, t) = R(r, t)\frac{1}{2\pi}\exp\left(il\varphi + \frac{ip_z z}{\hbar} - \frac{ip_z^2 t}{2m\hbar}\right). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3) и учитывая, что $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, получим уравнение для определения радиальной части волновой функции

$$i\frac{\partial R}{\partial t} = \left[\frac{\omega_0 l}{2} f + \frac{\omega_0 l^2}{4x} + \frac{\omega_0 f^2}{4} x - \omega_0\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\right]R, \tag{5}$$

$$x = \gamma_0 r^2, \quad \gamma_0 = \frac{e_0 H_0}{2\hbar c} = \frac{m\omega_0}{2\hbar}.$$

Решение уравнения (5) ищем в виде

$$R(x, t) = \int G_l(x, t;\ x', t')R_0(x', t')\,dx', \tag{6}$$

где $R_0(x, t)$ — нормированная радиальная часть волновой функции стационарного состояния при $t \leqslant t'$ [1].

$$R_0(x, t) = \sqrt{2\gamma_0}\, L_s^{|l|}(x)\exp\left(-\frac{iE_\perp t}{\hbar}\right),$$

$$\overline{L}_s^l = \sqrt{\frac{s!}{(s+l)!}}\, x^{\frac{l}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_s^l(x),$$

$$E_\perp = \hbar\omega_0\left(s + \frac{l}{2} + \frac{|l|}{2} + \frac{1}{2}\right), \tag{7}$$

а $G_l(x, t;\ x', t')$ — является функцией Грина для радиальной части волнового уравнения и должна удовлетворять условию

$$\lim_{t \to t'} G_l(x, t;\ x', t') = \delta(x - x'). \tag{8}$$

Далее мы должны найти вид функции G_l, который позволил бы удовлетворять условию (8) при $t \to t'$. Для этого, используя известную формулу суммирования для полиномов Лагерра [2], построим функцию Грина G_l^0 радиального уравнения Шредингера (5) для электрона в постоянном однородном магнитном поле

$$G_l^{(0)}(x, t; x', t') = \sum_{s=0}^{\infty} u^{s+\frac{|l|}{2}+\frac{l}{2}+\frac{1}{2}} \bar{L}_s^{|l|}(x) \bar{L}_s^{|l|}(x') =$$

$$= \frac{u^{\frac{l}{2}+\frac{1}{2}}}{1-u} \exp\left[-(x+x')\frac{1+u}{2(1-u)}\right] I_{|l|}\left(\frac{2\sqrt{xx'u}}{1-u}\right),$$

$$u = \exp[-i\omega_0(t-t')]. \tag{9}$$

Здесь $I|l|^{(x)}$ — функция Бесселя мнимого аргумента. Очевидно, зависимость от координаты x функции Грина уравнения (5) будет аналогична (9). Поэтому попытаемся удовлетворить уравнению (5) и условию (8), полагая

$$G_l(x, t; x', t') = \exp(-ax+b) I_{|l|}(2c\sqrt{x}). \tag{10}$$

Здесь a, b, c — неизвестные пока функции времени и x'.

Подставляя (6) в (5) и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} x^{-\frac{|l|}{2}} I_{|l|}(2c\sqrt{x}) = \frac{\dot{c}}{c}\left[|l|\, x^{-\frac{|l|}{2}} I_{|l|} + 2x\frac{\partial}{\partial x} x^{-\frac{|l|}{2}} I_{|l|}\right],$$

получим уравнение для определения a, b, c:

$$i\dot{a} = \omega_0 a^2 - \frac{\omega_0}{4} f^2, \tag{11}$$

$$i\left(\dot{b} + |l|\frac{\dot{c}}{c}\right) = \omega_0(|l|+1)a - \omega_0 c^2 + \frac{\omega_0 l}{2} f, \tag{12}$$

$$i\frac{\dot{c}}{c} = \omega_0 a. \tag{13}$$

Уравнение (11) удовлетворяется подстановкой

$$a = -\frac{i}{\omega_0}\frac{\dot{\xi}}{\xi}, \tag{14}$$

где $\xi(t)$ — решение уравнения

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{\omega_0 f}{2}\right)^2 \xi = 0. \tag{15}$$

Интегрируя уравнения (12) и (13), находим

$$c(t) = \frac{\sqrt{x'}}{i\omega_0\xi_2},\quad b(t) = -\ln(i\omega_0\xi_2) - \frac{x'\xi_1}{i\omega_0\xi_2} - \frac{i\omega_0 l}{2}\int_{t'}^{t} f(t')\,dt'.$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 — два линейно-независимых решения уравнения (15), удовлетворяющих условиям

$$\xi_1 = 1,\ \dot{\xi}_1 = 0;\ \xi_2 = 0,\ \dot{\xi}_2 = 1 \text{ при } t = t'.$$

Возникающие при интегрировании константы мы выбрали таким образом, чтобы при $t \to t'$ функция Грина удовлеторяла условию (8).

Таким образом, для функции Грина находим выражение следующего вида:

$$G_l(x, t;\ x', t') = \frac{1}{i\,\omega_0 \xi_2} \exp\left\{\frac{i}{\omega_0}\,\frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2}x + \frac{i}{\omega_0}\,\frac{\xi_1}{\xi_2}x' - \right.$$

$$\left. - \frac{i\omega_0 l}{2}\int\limits_{t'}^{t} f(t)\,dt\right\} I_{|l|}\left(2\,\frac{\sqrt{xx'}}{i\omega_0\xi_2}\right). \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (6) и вычисляя интеграл [3], найдем радиальную волновую функцию электрона в переменном магнитном поле

$$R(x,\ t) = \sqrt{\frac{2\gamma_0\, s!}{(s+|l|)!}}\ \xi^{-|l|-1}\cdot\left(\frac{\xi^*}{\xi}\right)^s x^{\frac{|l|}{2}} \exp\left[\left(\frac{1}{\xi} - \frac{\dot{\xi}_2}{i\,\omega_0\xi_2}\right)x\right] \times$$

$$\times\ L_s^{|l|}\left(\frac{x}{|\,\xi\,|^2}\right)\exp\left\{-\frac{i\omega_0 l}{2}\int\limits_{t'}^{t} f\,dt - \frac{iE_\perp\, t'}{\hbar}\right\}, \qquad (17)$$

$$\xi = \xi_1 + \frac{i\omega_0}{2}\,\xi_2.$$

Полная волновая функция уравнения Шредингера (3) определяется формулой (4). Нетрудно видеть, что после предельного перехода $f(t)\to 1$ волновая функция (17) совпадает с волновой функцией (7), описывающей движение в постоянном магнитном поле.

В заключение автор выражает благодарность участникам семинара проф. А. А. Соколова за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник. Синхротронное излучение. Под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., «Наука», 1966.
2. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1965.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
16.11 1970 г.

Кафедра
теоретической физики