Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1971

УДК 530.145; 532.132

В. А. ЗАГРЕБНОВ

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ЖИДКОМ ГЕЛИИ

Построен гамильтониан фонон-ротонного взаимодействия. Показано, что это взаимодействие не приводит к изменению спектра фононов, но существенно влияет на спектр ротонов.

В работах [2] получен положительный ответ на вопрос о возможности появления дисперсии в фононной части спектра возбуждений (см. [1] § 7) при учете фонон-фононного взаимодействия, однако при этом не было исследовано возможное влияние на перенормировку спектра фононов их взаимодействия с элементарными возбуждениями, которые имеют большие импульсы. В этом случае в массовом операторе, определяющем изменение спектра фононов, в качестве промежуточных состояний берутся не только фононы $k<k_{\max}$ (см. [2]), но и возбуждения с $k>k_{\max}$ (ротоны). Гамильтониан взаимодействия фононов с ротонами можно построить в рамках феноменологической теории [1], если учесть, что ротон в поле длинноволновых фононов можно рассматривать как частицу в движущейся среде, т. е. исходить из одночастичного спектра в окрестности ротонного минимума. Таким образом, первая часть взаимодействия связана с изменением плотности гелия при наличии фононов и получается из гамильтониана ротонов

$$H=\int d\vec{r}\Psi^{+}(\vec{r})\left\{\Delta(\rho)+\frac{\hbar^{2}[\hat{k}-k_{0}(\rho)]^{2}}{2\mu(\rho)}\right\}\Psi^{-}(\vec{r}),\qquad \hat{k}\equiv\frac{1}{i}|\vec{\nabla}|$$

разложением по степеням отклонения от равновесной плотности $\rho_1(\vec{r})=$ $=\rho(\vec{r})-\rho_0$:

$$H_{1}^{(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\int d\vec{r}\Psi^{+}(\vec{r})\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^{n}}{\partial\rho^{n}}\left[\Delta(\rho)+\frac{\hbar^{2}(\hat{k}-k_{0}(\rho))^{2}}{2\mu(\rho)}\right]_{\rho_{0}}\times\right.$$

$$\left.\times\rho_{1}^{n}(\vec{r})+\rho_{1}^{n}(\vec{r})\frac{\partial^{n}}{\partial\rho^{n}}\left[\Delta(\rho)+\frac{\hbar^{2}(\hat{k}-k_{0}(\rho))^{2}}{2\mu(\rho)}\right]_{\rho_{0}}\right\}\Psi^{-}(\vec{r}).\qquad(1)$$

Оператор $\rho_1(\vec{r})$ выражается через бозе-операторы рождения и уничтожения фононов

$$\rho_1(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{r}}\left(\frac{\hbar\rho_0 q}{2c}\right)^{1/2}(a^+_{-\vec{q}} + a_{\vec{q}}),$$

где c — скорость фононов, V — объем системы, а $\Psi^{\pm}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum e^{i\vec{k}\vec{r}} b^{\pm}_{\pm k}$ есть волновая операторная функция ротонов, где $b^{\pm}_{\vec{k}}$ — бозе-операторы рождения и уничтожения ротонов. Вторая часть взаимодействия связана с появлением дополнительного члена в гамильтониане ротонов при переходе от движущейся вместе с жидкостью системы координат к покоящейся [1]:

$$H_{\mathrm{I}}^{(2)} = -\frac{1}{2}\int d\vec{r}\,\Psi^+(\vec{r})\,(\hat{\vec{p}}\vec{v} + \vec{v}\hat{\vec{p}})\,\Psi^-(\vec{r}),$$

где $\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ — оператор импульса ротона, а

$$\vec{v}(\vec{r}) = -\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{q}}\vec{q}\left(\frac{\hbar c}{2\rho_0 q}\right)^{1/2}(a^+_{-\vec{q}} - a_{\vec{q}})\,e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

оператор локальной скорости жидкости [2]. Следовательно, гамильтониан взаимодействия длинноволновых фононов с ротонами эрмитов и в представлении операторов рождения — уничтожения имеет вид

$$H_{\mathrm{I}} = H_{\mathrm{I}}^{(1)} + H_{\mathrm{I}}^{(2)} = \sum_{n=1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\hbar\rho_0}{2cV}\right)^{n/2}\sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}_1\ldots\vec{q}_n}\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\left[\Delta(\rho) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\hbar^2(k - k_0(\rho))^2}{2\mu(\rho)}\right]_{\rho_0} + \frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\left[\Delta(\rho) + \frac{\hbar^2(k' - k_0(\rho))^2}{2\mu(\rho)}\right]_{\rho_0}\right\}\times$$

$$\times\,\delta_{\vec{k}+\vec{k}'+\vec{q}_1+\ldots+\vec{q}_n}\prod_{j=1}^{n}(q_j)^{1/2}(a^+_{-\vec{q}_j} + a_{\vec{q}_j})\,b^+_{-\vec{k}}b^-_{\vec{k}'} + \frac{1}{2\sqrt{V}}\times$$

$$\times\sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}}\left(\frac{\hbar^3 c}{2\rho_0 q}\right)^{1/2}(q^2 + 2\vec{q}\vec{k}')\,\delta_{\vec{k}+\vec{k}'+\vec{q}}\,(a^+_{-\vec{q}} - a_{\vec{q}})\,b^+_{-\vec{k}}b^-_{\vec{k}'}. \qquad (2)$$

Невзаимодействующим ротонам и фононам соответствует гамильтониан

$$H_0 = H_0^R + H_0^F = \sum_{\vec{k}}\left(\Delta(\rho_0) + \frac{\hbar^2(k - k_0(\rho_0))^2}{2\mu(\rho_0)}\right)b^+_{\vec{k}}b^-_{\vec{k}} + \sum_{\vec{q}}\hbar\omega(\vec{q})\,a^+_{\vec{q}}a_{\vec{q}}.$$

Из структуры гамильтониана взаимодействия (2) следует, что оно в отличие от фонон-фононного взаимодействия [2] не приводит к перенормировке энергии фонона $\hbar\omega(\vec{q})$. Действительно, пространство состояний для гамильтониана $H_0 + H_{\mathrm{I}}$,— есть прямое произведение фононного и ротонного подпространств, т. е. оно строится из вакуума, который есть прямое произведение вакуумных состояний $|0> = |0>_F|0>_R$. Итак, оператор H_{I}, который имеет нормальную форму по операторам ротонов, зануляется на однофононных состояниях $|\vec{q}, 0> = |\vec{q}>_F|0>_R$, что и означает отсутствие перенормировки спектра фононов $\omega(\vec{q})$ при включении взаимодействия с ротонами (2). Для коротковолновых фононов ($q \geqslant 0{,}5\,\text{Å}^{-1}$) возможен, по-видимому, еще один механизм взаимодействия с ротонами (см. [1], стр. 53), так как при столкновении коротковолнового фонона $\hbar\omega(\vec q) \geqslant \Delta(\rho_0)$ с ротоном возможно образование двух ротонов, чему соответствует гамильтониан взаимодействия

$$H_{\mathrm{I}}^{(3)} = \sum_{\vec k_1 \vec k_2 \vec k_3} \Gamma(\vec k_1 \vec k_2 \vec k_3 \vec q)\, \delta_{\vec k_1 + \vec k_2 + \vec k_3 + \vec q}\, b^{+}_{-\vec k_1} b^{+}_{-\vec k_2} b^{-}_{\vec k_3} a_{\vec q} + \text{эрм. сопр.} \tag{3}$$

Взаимодействие (3) дает соответствующий вклад в сечение фонон-ротонного рассеяния, однако не приводит для фононов ни к каким собственноэнергетическим эффектам, так как $H_{\mathrm{I}}^{(3)}$ также зануляется на однофононных состояниях $|q>_F|0>_R$.

Рассмотрим, как фонон-ротонное взаимодействие влияет на спектр $\Omega_0(k) = \frac{1}{\hbar}\left(\Delta(\rho_0) + \frac{\hbar^2 (k - k_0(\rho_0))^2}{2\mu(\rho_0)}\right)$ ротонных возбуждений; очевидно, не нулевой вклад будет давать лишь взаимодействие с длинноволновыми фононами (2). Этот вопрос представляет самостоятельный интерес, так как позволяет установить, насколько построенный гамильтониан взаимодействия (2) соответствует реальной ситуации в He_4, так как результаты относительно перенормировки спектра $\Omega_0(k)$, полученные с помощью (2), можно сравнить с результатами Питаевского [3], исследовавшего некоторые особые точки спектра возбуждений He_4 безотносительно к конкретному виду гамильтониана взаимодействия возбуждений. Спектр ротона, взаимодействующего с фононами, определяется полюсами полного пропагатора $D(k, \Omega) = \dfrac{1}{D_0^{-1}(k, \Omega) - M(k, \Omega)}$,

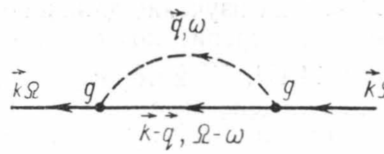

Рис.

где $M(k, \Omega)$ — полный массовый оператор, а $D_0^{-1}(k, \Omega) = \Omega - \Omega_0(\vec k) + i\delta$ пропагатор невзаимодействующих ротонов. Если ограничится в массовом операторе однофононным вкладом во втором порядке теории возмущений, которому соответствует приведенная диаграмма, тогда для $M(k, \Omega_0(k))$ получим

$$M(k, \Omega_0(k)) = -A \int_0^{\tilde q} q^2 dq \int_{-1}^{+1} d\lambda \frac{B(k, \lambda)}{q + \dfrac{2c\mu_0}{\hbar} - 2(k - k_0)\lambda}, \tag{4}$$

$$\tilde q = 0{,}5\,\text{Å}^{-1},\ \mu_0 = \mu_0(\rho_0),\ k_0 = k_0(\rho_0).$$

Из (4) видно, что массовый оператор имеет особенности для волновых векторов $k > k_0 + \frac{c\mu_0}{\hbar}$ и $k < k_0 - \frac{c\mu_0}{\hbar}$, т. е. $k_c^{\pm} = k_0 \pm \frac{c\mu_0}{\hbar}$ — критические волновые векторы ротонов. Асимптотика массового оператора (4) при $0 < \frac{k_c^{+} - k}{\tau} \ll 1$, где $\tau = k_c^{+} - k_0$ имеет вид

$$M(k, \Omega_0(k)) = -\alpha + \beta (k - k_c^{+})^3 \ln\left(\frac{k_c^{+} - k}{\tau}\right),$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$ определяется из (4), соответствующее поведение спектра возбуждений ротонов в окрестности особой точки k_c^+ определяется выражением

$$\Omega(k)=\frac{\Delta(\rho_0)}{\hbar}+\frac{\hbar\tau^2}{2\mu_0}-\alpha+c(k-k_c^+)+\frac{\hbar(k-k_c^+)^2}{2\mu_0}+$$

$$+\beta(k-k_c^+)^3\ln\left(\frac{k_c^+-k}{\tau}\right), \tag{5}$$

которое совпадает с результатом, полученным в [3]. Из (5) следует, что импульс $\hbar k_c^+$ для ротона является порогом испускания фонона, так как при $k>k_c^+$ в (5) и массовом операторе появляется отрицательная мнимая часть

$$Im M(k,\Omega)=-\pi\beta(k-k_c^+)^3,\ (k>k_c^+),$$

что соответствует появлению затухания, т. е. потере энергии ротона с $k>k_c^+$ на изучение длинноволновых фононов. В отличие от [3] настоящее рассмотрение позволяет определить критический волновой вектор $k_c^+\simeq 2{,}14\mathring{A}^{-1}$, которому на экспериментальной кривой спектра возбуждений действительно соответствует начало участка, близкого к линейному при $k\gtrsim k_c^+$ (см. [4]), для которого $\Omega'(k)=\omega'(q\to 0)=c$, т. е. удовлетворяются условия распада возбуждения с испусканием «мягких» фононов [3]. Волновому вектору k_c^- реальной критической точки не соответствует, так как в окрестности k_c^- для распада не выполняются законы сохранения. Таким образом, сравнение полученных результатов с теорией Питаевского [3] подтверждает правильность вида построенного гамильтониана фонон-ротонного взаимодействия (2).

Автор благодарит проф. Я. П. Терлецкого, доц. И. А. Квасникова и И. В. Воловича за помощь и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халатников И. М. Введение в теорию сверхтекучести. М., Физматгиз, 1965.
2. Загребнов В. А. «Вест. Моск. ун-та», физ., астрон., **11**, № 1 и № 5, 1971.
3. Питаевский Л. ЖЭТФ, **36**, 1168, 1959.
4. Henshaw D., Woods A. Phys. Rev., **121**, 1266, 1961.

Поступила в редакцию
15.11 1970 г.

Кафедра
теоретической физики