Итак, имея синхронные записи пульсаций температуры в четырех пространственно-разнесенных точках в море, описанным способом можно определить скорость движения, объемную форму, анизотропию и размеры температурных неоднородностей с учетом их изменчивости.

Причем спектр размеров неоднородностей будет в пределах разрешающей способности измерительного устройства, с помощью которого осуществляется регистрация пульсаций температуры [3].

Данный способ определения размеров неоднородностей был использован при исследовании структуры турбулентного потока в гидрофизической лаборатории МГУ, результаты эксперимента находятся в стадии статистической обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доброклонский С. В., Миркотан С. Ф., Хунджуа Г. Г., Шелковников Н. К. «Изв. АН СССР», физика атмосферы и океана, № 4, 1968.
2. Фавр А. Пространственно-временные корреляции в турбулентных потоках жидкости. В сб. «Механика», 2, № 90, 1965.
3. Шелковников Н. К., Миркотан С. Ф., Хунджуа Г. Г. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 1, 1968.

Поступила в редакцию
8.4 1971 г.

Кафедра физики
моря и вод суши

УДК 539.12

А. Б. КУКАНОВ, ТХАЙ КУАНГ

ОБ ОДНОМ СИНГУЛЯРНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА ПРИ НАЛИЧИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ И ОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ

Как известно, при квантовании волновых полей большую роль играет перестановочная функция скалярного поля (функция Паули—Иордана) [1—3], являющаяся решением однородного уравнения Клейна—Гордона с сингулярными начальными условиями. В работах [4, 5] (см. также [6]) были найдены решения этого уравнения с указанными начальными условиями при наличии постоянного и однородного магнитного [4] или электрического [5] поля. Найденные точные решения представляют интерес в свете ведущихся в последнее время интенсивных исследований в области квантовых эффектов взаимодействия заряженных частиц с внешними электромагнитными полями. В настоящей заметке мы хотим обобщить результаты [4, 5] на случай, когда одновременно имеются как электрическое, так и магнитное поле.

Предположим, что постоянные и однородные электрическое $\vec{E}$ и магнитное $\vec{H}$ поля направлены вдоль оси x_3. Задав независящий от времени вектор-потенциал поля в виде $A_\mu = \{0;\ x_1 H;\ 0;\ -iEx_3\}$, запишем уравнение Клейна—Гордона для заряженной частицы с зарядом e и массой покоя m_0 $\left(\gamma = \dfrac{E}{H}\right)$:

$$\left\{\Box - 2\left(\frac{eH}{\hbar c}\right)\left[ix_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma x_3\frac{\partial}{\partial x_4}\right] - \left(\frac{eH}{\hbar c}\right)^2 (x_1^2 - \gamma^2 x_3^2) - \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right\}\psi = 0 \tag{1}$$

Переходя к новым переменным

$$x_i \to \left(\frac{\hbar c}{eH}\right)^{1/2} x_i \ (i = 1,\ 2,\ 3),\ t \to \left(\frac{\hbar}{eHc}\right)^{1/2} t,\quad m_0 \to \left(\frac{\hbar eH}{c^3}\right)^{1/2} m_0, \tag{2}$$

запишем уравнение (1) в виде

$$\left[\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2ix_1\frac{\partial}{\partial x_2} + 2i\gamma x_3\frac{\partial}{\partial t} - (x_1^2 - \gamma^2 x_3^2) - m_0^2\right]\Psi = 0. \tag{3}$$

Искомое решение $\Delta(P, P')$, где P и P' обозначают две точки с координатами x_1, x_2, x_3, t и x_1', x_2', x_3', t', определим следующим образом [3,4]. Оно должно удовлетворять уравнению

$$\left[\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2ix_1\frac{\partial}{\partial x_2} + 2i\gamma x_3\frac{\partial}{\partial t} - (x_1^2 - \gamma^2 x_3^2) - m_0^2\right]\Delta(P, P') = 0 \tag{4}$$

по переменным x_1, x_2, x_3, t и уравнению

$$\left[\Delta' - \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2i x_1'\frac{\partial}{\partial x_2'} - 2i\gamma x_3'\frac{\partial}{\partial t'} - (x_1'^2 - \gamma^2 x_3'^2) - m_0^2\right]\Delta(P, P') = 0 \tag{5}$$

по переменным x_1', x_2', x_3', t'. При $t = t'$ оно должно удовлетворять условиям

$$\left.\begin{aligned} &\Delta(P, P') = 0\\ &\frac{\partial\Delta}{\partial t'} = -\frac{\partial\Delta}{\partial t} = -\delta(\xi_1)\,\delta(\xi_2)\,\delta(\xi_3)\end{aligned}\right\}\tau = 0, \tag{6}$$

где $\delta(\vec{\xi}) = \delta(\xi_1)\,\delta(\xi_2)\,\delta(\xi_3)$ — трехмерная функция Дирака, а

$$\xi_i = x_i' - x_i, \quad \tau = t' - t.$$

Для нахождения решения воспользуемся методом [4, 5]. Полагая

$$\Delta(P, P') = D(P, P')\exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\int\limits_{P'}^{P} A_\mu(x'')\,dx_\mu''\right\}, \tag{7}$$

находим в новых переменных (2)

$$\Delta(P, P') = D(P, P')\exp\left\{\frac{(x_1' + x_1)\,\xi_2 + (x_3' + x_3)\,\gamma\tau}{2i}\right\}. \tag{8}$$

Отсюда и из (4), (5) находим, что функция $D(P, P')$ должна удовлетворять уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{1}{4}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \gamma^2\tau^2 - \gamma^2\xi_3^2) - m_0^2\right]D = 0, \tag{9}$$

причем

$$\left[\left(\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1} - \xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right) + \gamma\left(\tau\frac{\partial}{\partial\xi_3} + \xi_3\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\right]D = 0. \tag{10}$$

Из (10) и в силу произвольности γ следует, что D должна зависеть от переменных ξ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$, τ в виде комбинаций

$$\sigma = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \quad \text{и} \quad \rho = \frac{1}{2}(\tau^2 - \xi_3^2).$$

Начальные условия преобретают вид

$$D(P, P') = 0 \text{ при } \tau = 0 \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial D}{\partial\tau}\right)_{\tau=0} = -\delta(\xi_1)\,\delta(\xi_2)\,\delta(\xi_3). \tag{12}$$

Ход дальнейших выкладок, сводящихся к последовательному применению метода разделения переменных с учетом начальных условий (11) и (12), приводит к следующему выражению для функции $D(P, P')$:

$$D(P, P') = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\gamma}{2\pi i}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty}\left\{-\tau e^{-\frac{i\gamma\tau^2}{4}}{}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ i\gamma\frac{\tau^2}{2}\right)\right\}\times$$

$$\times L_n(\sigma)\exp\left(-\frac{\sigma}{2}\right)L_{n'}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{i\gamma}{2}\xi_3^2\right)\exp\left(\frac{1}{4}i\gamma\xi_3^2\right). \tag{13}$$

Здесь $L_n(\sigma)=L_n\left(\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2)\right)$ и $L_{n'}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{i}{2}\gamma\xi_3^2\right)$ — полиномы Лягерра, ${}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ i\gamma\frac{\tau^2}{2}\right)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, причем

$$\frac{1}{2}(1-\nu)=\frac{i}{2\gamma}(m_0^2+2n+1)+(n'+1).$$

Если воспользоваться для функции ${}_1F_1$ интегральным представлением, построенным Саутером [7], в форме [5] и сделать в нем замену переменных $t=-i\,\mathrm{cth}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$, то, используя выражение для производящей функции полиномов Лягерра, мы сможем провести суммирование по n и n'. Восстанавливая прежние переменные преобразованием, обратным (2), и переходя к системе единиц $\hbar=c=1$, найдем окончательно

$$D=-\frac{\varepsilon(\tau)}{8\pi^2}\int\limits_{C_\alpha}\frac{e^{\frac{ieE}{4}(\tau^2-\xi_3^2)\,\mathrm{cth}\left(\frac{eE}{2\alpha}\right)+\frac{im_0^2}{2\alpha}}\cdot e^{-\frac{ieH}{4}(\xi_1^2+\xi_2^2)\,\mathrm{ctg}\left(\frac{eH}{2\alpha}\right)}}{\left(\frac{2\alpha}{eH}\right)\sin\left(\frac{eH}{2\alpha}\right)\cdot\left(\frac{2\alpha}{eE}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{eE}{2\alpha}\right)}\,d\alpha. \tag{14}$$

Здесь C_α — модифицированный контур Саутера [7,5],

$$\varepsilon(\tau)=\begin{cases}1, & \text{если } \tau>0,\\ -1, & \text{если } \tau<0.\end{cases}$$

Найденное точное решение уравнения Клейна—Гордона в частных случаях, когда $E=0$, $H\neq0$ или $H=0$, $E\neq0$, совпадает с результатами [4] и [5] соответственно.

В случае отсутствия полей ($E\to0$, $H\to0$) мы получаем известный результат для свободной частицы [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехтеориздат, 1957.
2. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958.
3. Газиорович С. Физика элементарных частиц. М., «Наука», 1969.
4. Géhéniau J. Physica, **16**, № 11—12, 822, 1950.
5. Demeur M. Physica, **17**, № 11—12, 933, 1951.
6. Demeur M. Académie R. de Bélgique, **28**, Fasc. 5, 1953.
7. Sauter F. Z. Phys., **69**, 742, 1931.

Поступила в редакцию
2.4 1971 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 621.391.822.3 : 539.293.011

К. И. РОЗЕНТУР

ФЛУКТУАЦИИ ТОКА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ СО СЛОЖНОЙ ЗОННОЙ СТРУКТУРОЙ

Известно [1], что в полупроводниках типа Ge и Si зона проводимости содержит ряд эквивалентных эллипсоидов энергии, симметрично расположенных в зоне Бриллюэна.

В работе [2] рассматривались флуктуации числа электронов в отдельном эллипсоиде полупроводника, связанные с межэллипсоидными переходами. Наличие такого