Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1972

УДК 535.8

Л. Е. ЧИРКОВ

ИНВАРИАНТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИХ МОДУЛЯТОРОВ СВЕТА

В работе получено общее решение, описывающее распространение световой волны с некоторой конечной расходимостью в анизотропном электрооптическом веществе при произвольных исходных данных. В основе расчета лежат матричные операторы. С их помощью удается обобщить метод Фурье-анализа на случай распространения волн в анизотропной среде.

Коэффициенты преломления и собственные направления поляризации плоской волны

Процесс распространения световых волн в прозрачной анизотропной среде может быть описан волновым уравнением

$$c^2 (\vec{\tilde{\nabla}} \vec{\nabla} - \vec{\nabla} \vec{\tilde{\nabla}}) \vec{D} = - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D}, \tag{1}$$

которое должно быть дополнено условием поперечности электромагнитной волны $\vec{\tilde{\nabla}} \vec{D} = 0$.

Под векторными функциями будем понимать совокупность трех скалярных функций, записанных с помощью матрицы с одним столбцом. Векторы, отмеченные знаком тильды, следует представлять матрицей, выписанной в строку.

Тензор поляризационных постоянных $\hat{p}$ связывает вектор напряженности электрического поля волны с вектором индукции соотношением $\vec{E} = \hat{p} \vec{D}$, где тензор $\hat{p}$ — симметричный оператор, определяемый девятью матричными элементами, из которых лишь шесть линейно независимы.

Обычно $\hat{p}$ задан в кристаллографической системе координат тройкой главных коэффициентов преломления.

Собственными решениями уравнения (1) для бесконечной анизотропной среды являются плоские волны:

$$\vec{D} = D_0 \vec{k} e^{j\varphi}. \tag{2}$$

где $\varphi = \omega t - \frac{\omega n}{c} \vec{\tilde{k}}_3 \vec{r}$, D_0 — амплитудный множитель, $\vec{k}$ — единичный вектор, описывающий поляризацию, $\vec{k}_3$ — единичный волновой вектор, n — коэффициент преломления. Подставив (4) в (1), получим уравнение, определяющее собственные направления поляризации волны:

$$\hat{p}\vec{k} - \vec{k}_3\tilde{\vec{k}}_3\hat{p}\vec{k} = \frac{1}{n^2}\vec{k}, \tag{3}$$

дополненное условием ортогональности

$$\tilde{\vec{k}}_3\vec{k} = 0.$$

Решениями (5) являются два взаимно ортогональных вектора $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$, которые вместе с $\vec{k}_3$ образуют базисную тройку векторов. Пусть $\hat{p}$ задан элементами $\overset{\circ}{p}_{ij} = \tilde{\vec{a}}^{\circ}_i\hat{p}\,\vec{a}^{\circ}_j$, где $\vec{a}^{\circ}_i$ — базисная тройка исходной системы координат. Если $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — векторы, определяемые с помощью следующих соотношений:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{k}_3 \times \vec{a}_3^0}{\sqrt{1-k_{33}^2}};\ \vec{a}_2 = \vec{k}_3 \times \vec{a}_1;\ k_{33} = \tilde{\vec{a}}_3^0\vec{k}_3,$$

то угол α между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{k}_1$ равен

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tilde{\vec{a}}_1\hat{p}\,\vec{a}_2}{\tilde{\vec{a}}_1\hat{p}\vec{a}_1 + \tilde{\vec{a}}_2\hat{p}\vec{a}_2}.$$

Подставив $\vec{k}_\alpha$ в (3) и умножая слева на $\tilde{\vec{k}}_\alpha$, получим $\frac{1}{n_\alpha^2} = \tilde{\vec{k}}_\alpha\hat{p}\vec{k}_\alpha$ (буквами греческого алфавита обозначены индексы, принимающие значения 1, 2).

Под действием внешнего электрического поля тензор $\hat{p}$ электрооптической среды изменяется. Это изменение можно описать с помощью тензора $\hat{R}$, т. е. $\hat{p} = \hat{p}_0 + \hat{R}$. Индексом нуль будем отмечать величины, относящиеся к среде, невозмущенной внешним полем. В случае линейного электрооптического эффекта

$$R_{ij} = r_{ijk}E_k = r_{ijk}e_kE, \tag{4}$$

где r_{ijk} — элементы тензора электрооптических постоянных, e_k — направляющие косинусы вектора напряженности электрического поля. В (4) по повторяющемуся индексу k ведется суммирование.

Под действием поля направления поляризации $\vec{k}_\alpha$ в общем должны измениться. Угол β поворота векторов $\vec{k}_\alpha$ относительно векторов $\vec{k}_{0\alpha}$ невозмущенной среды равен

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2R_{12}}{p_{11} - p_{22} + R_{11} - R_{22}}, \tag{5}$$

где $p_{ij} = \tilde{\vec{k}}_{0i}\hat{p}_0\vec{k}_{0j}$, $R_{ij} = \tilde{\vec{k}}_{0i}\hat{R}\vec{k}_{0j}$. В (5) учтено соотношение $p_{12} = \tilde{\vec{k}}_{01}\hat{p}_0\vec{k}_{02} = 0$, вытекающее из уравнения (3).

Если световой поток близок к оптической оси анизотропной среды, то $p_{11}-p_{22}\to 0$, и угол β может достигать значительной величины. Коэффициенты преломления n_α среды, возбужденной электрическим полем, определяются соотношением

$$\frac{1}{n_\alpha^2}=\frac{1}{n_{0\alpha}^2}+r_\alpha E \text{ или } n_\alpha\simeq n_{0\alpha}-\frac{1}{2}n_{0\alpha}^3 r_\alpha E, \tag{6}$$

где $\frac{1}{n_{0\alpha}^2}=\vec{\tilde{k}}_\alpha\hat{p}_0\vec{k}_\alpha$, $r_\alpha=\frac{1}{E}\vec{\tilde{k}}_\alpha\hat{R}\vec{k}_\alpha$.

Вдали от оптических осей среды угол β мал, поскольку естественная анизотропия всегда выше наведенной, т. е. $|p_{11}-p_{22}|\gg|R_{ij}|$. В этом случае $\vec{k}_\alpha$ и $\vec{k}_{0\alpha}$ практически совпадают, поэтому в (6) вместо $\vec{k}_\alpha$ можно использовать $\vec{k}_{0\alpha}$. В этом случае

$$n_\alpha\simeq n_{0\alpha}-\frac{1}{2}n_{0\alpha}^3 r_{0\alpha}E,$$

где $\frac{1}{n_{0\alpha}^2}=\vec{\tilde{k}}_{0\alpha}\hat{p}_0\vec{k}_{0\alpha}$, $r_{0\alpha}=\frac{1}{E}\vec{\tilde{k}}_{0\alpha}R\vec{k}_{0\alpha}$.

Изменение n_α ведет к соответствующему изменению фазовой функции φ (2):

$$\varphi_\alpha=\omega t-\frac{\omega n_{0\alpha}}{c}l+\pi\frac{l}{d}\frac{v}{v_\alpha}=\varphi_{0\alpha}+\pi\frac{l}{d}\frac{v}{v_\alpha}, \tag{7}$$

где $l=\vec{\tilde{k}}_3(\vec{r}_{\text{вых}}-\vec{r}_{\text{вх}})$ — длина электрооптической ячейки по лучу, $\vec{r}_{\text{вх}}$ и $\vec{r}_{\text{вых}}$ — радиусы-векторы, проведенные соответственно к точкам входной и выходной граней электрооптического элемента, d — толщина электрооптического элемента, измеренная вдоль E, v — действующее напряжение, $v_\alpha=-\frac{\lambda}{n_{0\alpha}^3 r_\alpha}$.

Общие решения волнового уравнения

Пусть в некоторой точке $\vec{r}_0$ анизотропной среды поляризация плоской волны описывается вектором $\vec{D}(\vec{r}_0)$. Введем оператор $\hat{S}$, который по известной в точке $\vec{r}_0$ поляризации позволяет определить $\vec{D}(\vec{r})$ в произвольной точке среды. Матричные элементы $s_{ij}=\vec{\tilde{k}}_i\hat{S}\vec{k}_j$ оператора $\hat{S}$, очевидно, должны быть функциями координат и времени. Подставив

$$\vec{D}(\vec{r})=\hat{S}\vec{D}(\vec{r}_0) \tag{8}$$

в уравнение (1) и решая последнее в представлении $\vec{k}_i$, получим

$$\begin{pmatrix}D_1\\D_2\\0\end{pmatrix}_{\vec{r}}=\begin{pmatrix}e^{j\varphi_1}&0&0\\0&e^{j\varphi_2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1\\D_2\\0\end{pmatrix}_{\vec{r}_0}, \tag{9}$$

где с учетом электрооптических добавок

$$\varphi_\alpha = \varphi_{0\alpha} + \pi \frac{l}{d} \frac{v}{v_\alpha}; \quad l = \vec{\vec{k}}_3 (\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Матрица, представляющая оператор $\widehat{S}$, впервые с помощью формальных построений была рассчитана Джонсом [1].

Общее решение волнового уравнения может быть представлено суперпозицией плоских волн. Однако при формулировке соответствующих интегральных соотношений следует иметь в виду, что в случае анизотропных сред коэффициенты преломления n_α и собственные направления поляризации являются функциями волнового вектора $\vec{k}_3$. Используя оператор $\widehat{S}$ (8, 9), составим суперпозицию:

$$\vec{D}(t, \vec{r}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int\limits_{\omega,\sigma} \widehat{S}\widehat{\rho}\vec{D}(\omega, \vec{k}_3)\, d\omega d\sigma, \tag{10}$$

где $\vec{D}(\omega, \vec{k}_3)$ функция спектральной плотности, а весовой оператор

$$\widehat{\rho} = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{pmatrix} n_{01}^2 + n_{01}^4 p_{31} & 0 \\ 0 & n_{02}^2 + n_{02}^4 \end{pmatrix}.$$

Матрица, представляющая оператор $\widehat{\rho}$, определена в представлении $\vec{k}_i$. Интегрирование в (10) ведется по прямой ω и поверхности σ шара единичного радиуса, определяемой условием $|\vec{k}_3| \equiv 1$. Под интегралом от матричного оператора следует понимать соответствующую совокупность интегралов от скалярных матричных элементов.

Подставив (10) в уравнение (1), можно убедиться, что (10) действительно является решением (1). Если на некоторой плоскости f световая волна задана функцией распределения амплитуд $\vec{D}_f(t, \vec{r})$, то функция спектральной плотности $\vec{D}(\omega, \vec{k}_3)$ может быть представлена интегралом

$$\vec{D}(\omega, \vec{k}_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int\limits_{t,f} \widehat{S}^* \vec{D}(t, \vec{r})\, dt df. \tag{11}$$

Выписанные в явном виде интегралы по отдельным матричным элементам, к которым сводятся интегрально-операторные соотношения (10) и (11), достаточно громоздки. Однако они могут быть существенно упрощены в одном частном случае, очень важном с точки зрения практических расчетов. Речь идет о решениях, описывающих слаборасходящуюся волну, представляющую собой группу плоских волн, сконцентрированных вокруг волны с волновым вектором $\vec{\vec{k}}_3$. Пусть $\vec{\vec{k}}_\alpha$ — векторы поляризации этой волны. В качестве основной системы координат, в которой удобно вести интегрирование, следует выбрать систему, определяемую базисной тройкой $\vec{\vec{k}}_i$.

Введем вектор $\vec{\theta} = \vec{k}_1 \vec{\vec{k}}_3 \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \vec{\vec{k}}_3 \vec{k}_2$. Координаты $\theta_\alpha = \vec{\vec{k}}_\alpha \vec{\theta} = \vec{\vec{k}}_3 \vec{k}_\alpha$ вектора $\vec{\theta}$ с точностью до малых второго порядка совпадают с углами между векторами $\vec{\vec{k}}_\alpha$ и $\vec{k}_\alpha$. Вектор $\vec{\theta}$ с точностью до малых второго порядка ортогонален вектору k_3, поэтому в (10) интегрирование по поверхности шара σ можно заменить интегрированием по плоскости $\vec{\vec{k}}_3\vec{\theta} = 0$.

Зависимость n_α от $\vec{\theta}$ в первом приближении имеет вид

$$\frac{1}{n_\alpha^2} = \bar{p}_{\alpha\alpha} + 2\bar{p}_{3\alpha}\theta_\alpha,$$

или

$$n_\alpha \simeq \bar{n}_\alpha - \bar{n}_\alpha^3 p_{3\alpha}\theta_\alpha, \qquad (12)$$

где

$$\bar{p}_{\alpha\alpha} = \vec{\vec{k}}_\alpha \hat{p} \vec{k}_\alpha = \frac{1}{\bar{n}_\alpha^2}; \ \bar{p}_{3\alpha} = \vec{\vec{k}}_3 \hat{p} \vec{k}_\alpha.$$

Используя указанное выше приближение и учитывая зависимость n_α от $\vec{\theta}$, определяемую (12), покажем, что интегралы (10) совпадают с соответствующими интегралами Фурье. Применяя к ним теорему свертки, получим следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}_{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \hat{T}(\vec{l}_1) & 0 \\ 0 & \hat{T}(\vec{l}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{j\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}_{\vec{r}_0}, \qquad (13)$$

где $\hat{T}(\vec{l}_\alpha)$ — оператор сдвига, $\vec{l}_\alpha$ — вектор сдвига, длина которого $|\vec{l}_\sigma| = \frac{c}{n_\alpha} \frac{\tilde{1}}{\vec{v}_{гр\alpha}} (\vec{r} - \vec{r}_0)$ определяет величину относительного смещения световых потоков, поляризованных по $\vec{\vec{k}}_\alpha$, а направление совпадает с направлением $\vec{\vec{k}}_\alpha$, $\vec{v}_{гр\,\alpha} = \left[\frac{\bar{n}_\alpha}{c} (\vec{\vec{k}}_3 - \bar{n}_\alpha^{-2} \bar{p}_{3\alpha} \vec{\vec{k}}_\alpha) \right]^{-1}$ — групповая скорость.

Амплитудные модуляторы света

В электрооптической среде удается осуществить только фазовую модуляцию света. Для того чтобы преобразовать фазовую модуляцию в амплитудную, обычно используют схему, в которой электрооптическая ячейка размещена между поляризаторами. Функционально поляризатор можно описать единичным вектором, который в дальнейшем будем обозначать символом $\vec{A}$.

Если через модулятор распространяется плоская волна, то выходящий из модулятора световой поток описывается функцией

$$\vec{D}_{вых} = \vec{A}_2 \tilde{\vec{A}}_2 \hat{S} \vec{A}_1 \tilde{\vec{A}}_1 \vec{D}_{вх},$$

где $\vec{A}_1$ — входной поляризатор, $\vec{A}_2$ — выходной.

В матричном представлении в системе координат $\vec{k}_i$:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}_{вых} = \begin{pmatrix} \cos\psi_2 \\ \sin\psi_2 \end{pmatrix} (\cos\psi_2, \ \sin\psi_2) \begin{pmatrix} e^{j\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi_2} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\psi_1 \\ \sin\psi_1 \end{pmatrix} (\cos\psi_1, \ \sin\psi_1) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}_{вх}, \qquad (14)$$

где ψ_1 и ψ_2 — углы, которые образуют соответственно $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ с вектором $\vec{k}_1$, т. е. $\cos\psi_\alpha = \tilde{\vec{k}}_1 \vec{A}_\alpha$.

Поскольку φ_α, входящее в (14), зависит от напряжения, приложенного к электрооптической ячейке (6), амплитуда $\vec{D}_{\text{вых}}$ является функцией приложенного напряжения. Однако сама амплитуда не является наблюдаемой величиной. Фотоприемники, используемые в качестве детекторов световых потоков, выделяют сигнал, пропорциональный среднему значению квадрата амплитуды:

$$I = \frac{1}{f}\int_f \tilde{\vec{D}}^* \vec{D}\, df, \tag{15}$$

где f — площадь входной щели фотоприемника.

Применяя к интегралу (15) теорему Рейли, позволяющую перейти от суммирования в пространстве координат к суммированию по спектральным составляющим, получим следующее выражение, определяющее передаточную функцию модулятора света:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\int_\theta I(\vec{\theta})\, d\theta_1\, d\theta_2}{\int_\theta I_0(\vec{\theta})\, d\theta_1\, d\theta_2}, \tag{16}$$

где через $I(\vec{\theta})$ обозначено $\tilde{\vec{D}}^*(\vec{\theta})\vec{D}(\vec{\theta})$, I_0 — интенсивность светового потока, падающего на модулятор, I — интенсивность прошедшего потока. Интегрирование ведется по всем возможным значениям в пределах аппертуры измерительного прибора.

Если через электрооптический элемент распространяется плоская волна, то, подставляя в (16) $\vec{D}$, взятое из (14), получим

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2(\psi_1 - \psi_2) - \sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{2}\,\frac{l}{d}\,\frac{v}{v_0}\right), \tag{17}$$

где

$$\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02},\quad v_0 = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1}.$$

Обычно $\psi_1 = -\psi_2 = \frac{\pi}{4}$ или $\psi_1 = \psi_2 = \frac{\pi}{4}$.

Амплитудная характеристика электрооптического модулятора (17), рассчитанная в приближении плоской волны, не всегда отвечает истинной картине модуляции. Часто необходимо учитывать конечную расходимость потока. Учитывая (13), в этом случае получим

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{sinc}\frac{\pi}{2}\,\frac{\vec{\theta}_u}{\vec{\theta}_0}\right) + \operatorname{sinc}\frac{\pi}{2}\,\frac{\vec{\theta}_u}{\vec{\theta}_0}\sin^2 \times$$

$$\times\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{2}\,\frac{\vec{\theta}_u}{\vec{\theta}_0} + \frac{\pi}{2}\,\frac{v}{v_0}\right), \tag{18}$$

где через $\operatorname{sinc} x$ обозначена функция

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x},\quad \frac{1}{\vec{\theta}_0} = \frac{2l}{\lambda}\left(\bar{n}_1^3\, p_{31}, \tilde{\vec{k}}_1 + \bar{n}_2^3\, p_{32}\, \tilde{\vec{k}}_2\right),$$

$\vec{\theta}_u$ — вектор, характеризующий угловую апертуру фотоприемника, $\vec{\theta}_u = \theta_{u1}\vec{\vec{k}}_1 + \theta_{u2}\vec{\vec{k}}_2$, θ_{u1} и θ_{u2} — угловые размеры входной щели фотоприемника вдоль векторов $\vec{\vec{k}}_1$ и $\vec{\vec{k}}_2$.

Если полная расходимость светового потока $\theta > \theta_0$, а $\theta_u \ll \theta_0$, то, перемещая фотоприемник, можно измерить распределение интенсивности в интерференционном поле на выходе модулятора. Это распределение, если $v = \mathrm{const}$, имеет вид

$$\frac{I(\vec{\theta})}{I_0(\vec{\theta})} = \sin^2\left(\frac{\overline{\varphi}_0}{2} + \frac{\pi}{2}\,\frac{\vec{\theta}}{\vec{\theta}_0} + \frac{\pi}{2}\,\frac{l}{d}\,\frac{v}{v_0}\right). \tag{19}$$

Из (19) ясен физический смысл параметра $\vec{\theta}_0$. Длина $\vec{\theta}_0$, очевидно, равна угловой полуширине интерференционной полосы, а направление $\vec{\theta}_0$ совпадает с направлением нормали к интерференционной полосе, лежащей в плоскости $\vec{\vec{k}}_3\vec{\theta} = 0$.

Поскольку групповые скорости потоков, поляризованных по $\vec{\vec{k}}_1$ и $\vec{\vec{k}}_2$, в общем случае не совпадают (13), световые лучи на выходе модулятора перекрываются лишь частично. В первом приближении угол между потоками равен $\theta_{\text{гр}} = \sqrt{n_1^4 p_{31}^2 + n_2^4 p_{32}} \simeq \frac{\lambda\sqrt{n_1 n_2}}{2l\theta_0}$. Если длина электрооптической ячейки ограничена условием $l \leqslant \frac{R}{\theta_{\text{гр}}}$, то в зоне перекрытия световых потоков сосредоточено не меньше половины полной интенсивности потока. (R — радиус сечения светового луча). Из (18) следует, что апертура измерительного прибора должна быть ограничена условием $\theta_u < \theta_0$. Для светового потока, имеющего лишь дифракционную расходимость $\theta \simeq \frac{\lambda}{R4}$, при длине электрооптического элемента $l \leqslant \frac{R}{\theta_{\text{гр}}}$ расходимость удовлетворяет условию $\theta < \theta_0$, поэтому площадь входной щели фотоприемника может иметь те же размеры, что и зона перекрытия. При больших длинах электрооптического элемента или расходимостях θ, превышающих дифракционную, допустимая площадь входной щели фотоприемника оказывается меньше зоны перекрытия, что в конечном итоге ведет к дополнительным потерям интенсивности.

Указанные ограничения допустимой длины электрооптической ячейки и расходимости светового потока часто оказываются слишком жесткими. Однако если световой луч образует небольшие углы с одной из главных осей тензора $\hat{p}$, то $p_{3\alpha} \to 0$. В этих случаях групповые скорости потоков обоих поляризаций практически совпадают. Кроме того, зависимость n_α от θ оказывается квадратичной, что ведет к увеличению угловой ширины интерференционных полос.

Рассмотрим очень важный с практической точки зрения случай, когда световой луч распространяется в одноосной электрооптической среде, причем волновой вектор n луча параллелен оптической оси. Для светового потока, сечение которого имеет форму круга, учитывая при определении зависимости l от d малые второго порядка, получим

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sinc}\frac{\pi}{2}\frac{2\theta_u^2}{\theta_0^2}\right)+\operatorname{sinc}\frac{\pi^2}{2}\frac{2\theta_u^2}{\theta_0^2}\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{l}{d}\frac{v}{v_0}, \qquad (20)$$

где $\theta_0^2=\dfrac{\lambda}{2l\,(n_e-n_0)}$.

Параметр θ_0 имеет физический смысл полуширины нулевого (центрального) интерференционного кольца. Угловая аппертура измерительного прибора ограничена условием $\theta_u\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\theta_0$. Во многих случаях практически может быть выполнено условие $\theta<\theta_u$, поэтому оказывается возможным подать на фотоприемник всю интенсивность, прошедшую через модулятор.

Сложные электрооптические устройства, содержащие несколько элементов, могут быть представлены оператором, представляющим собой произведение операторов, описывающих отдельные элементы. Некоторые задачи анализа и синтеза подобных цепей, содержащих двулучепреломляющие элементы, были рассмотрены в [2]. В основе расчета, рассмотренного в этих работах, лежит матрица Джонса, которая здесь представляет оператор $\hat{S}$. Однако в формулировке Джонса S-матрица применима лишь в приближении плоской волны. Метод, изложенный в данной работе, позволяет отказаться от этого ограничения.

В качестве примера расчета многоэлементных цепей рассмотрим работу электрооптического модулятора, в котором осуществляется компенсация естественной анизотропии. Модулятор подобного типа содержит три анизотропных элемента, расположенных между скрещенными поляризаторами. Два элемента — первый и третий — электрооптические, они тождественны по размерам и одинаковым образом ориентированы. Второй элемент представляет собой компенсирующую пластину, которую пока будем рассматривать как заданную произвольным образом. Перемножая матрицы, отвечающие этим элементам, и считая, что через модулятор распространяется слаборасходящаяся волна, после ряда преобразований получим

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{4}\Bigg\{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\left[\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sinc}\frac{\pi}{2}\frac{\vec{\theta}}{2\vec{\theta}_0'}\right)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sinc}\frac{\pi}{0}\frac{\vec{\theta}}{\vec{\theta}_0'}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{\vec{\theta}}{\vec{\theta}_0'}+\frac{\varphi_0'}{2}\right)\right]\Bigg\}[\hat{T}(2\vec{l}_1)+\hat{T}(2\vec{l}_2)]+$$

$$+\sin^2 2\alpha\left[\frac{1}{2}\left(1-\sin c\,\frac{\pi}{2}\frac{\vec{\theta}}{\vec{\theta}_0'}\right)+\right. \qquad (21)$$

$$\left.+\operatorname{sinc}\frac{\pi}{2}\frac{\vec{\theta}}{\vec{\theta}_0'}\sin^2\left(\frac{\varphi_0'}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{\vec{\theta}}{\vec{\theta}_0}+\frac{\pi}{2}\frac{l}{d}\frac{v}{v_0}\right)\hat{T}(\vec{l}_1+\vec{l}_2),\right.$$

где α — угол поворота компенсирующей пластины относительно электрооптических элементов, $\vec{\theta}_0'$ — угловой параметр компенсирующей пластины.

Из (21) видно, что при $\alpha=\frac{\pi}{4}$ и $\theta\ll\theta_0'$ на выходе модулятора будет наблюдаться только модулированный луч, если фазовая задержка φ_0', приобретаемая лучами в компенсирующей пластине, удовлетворяет условию $\varphi_0' = \pi + 2\pi k$. В противном случае на выходе модулятора должны наблюдаться три луча, один из которых промодулирован (луч, смещенный в точку $\vec{l}_1 + \vec{l}_2$), два других (лучи, смещенные соответственно в точки $2\vec{l}_1$ и $2\vec{l}_2$) модуляции не имеют. При этом паразитные лучи могут появиться на выходе модулятора как за счет не точной юстировки $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ или не точной компенсации $\varphi_0' = \pi$, так и при точной юстировке схемы и точной компенсации, если компенсирующая пластина достаточно толста, поскольку при этом может оказаться относительно малой величина углового параметра $\vec{\theta}_0'$.

Приведенные примеры не исчерпывают всех вопросов, связанных с влиянием расходимости световых потоков на ход модуляционных характеристик электрооптических устройств, однако они показывают, что это влияние часто может быть существенным.

Автор благодарен Е. Р. Мустель и В. Н. Парыгину за постоянное внимание и помощь в работе. Автор признателен Ю. И. Сиротину за полезные дискуссии и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones R. C. J. Opt. Soc. Am., **31**, 488, 1941.
2. Harris S. E., Ammann K. O., Chang I. C. J. Opt. Soc. Am., **54**, 1267, 1964.

Поступила в редакцию
2.11 1970 г.

Кафедра
физики колебаний