

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1972

УДК 533.95 : 538.4

Л. С. КУЗЬМЕНКОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КОВАРИАНТНОЙ СТАТИСТИКИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Развивается подход к статистическому описанию гравитирующих частиц в кривых пространствах, опираясь на так называемое пространство опорных элементов в статистической механике.

Как показал А. А. Власов [1], переход к статистическим методам в теории тяготения связан с построением пространства опорных элементов. Это пространство является многообразием восьми измерений и представляет собой топологическое произведение базисного риманова пространства и пространства значений четырехмерной скорости материальных частиц, причем на абсолютную величину вектора скорости не накладывается никаких ограничений.

Исходная общековариантная система уравнений, состоящая из уравнения непрерывности для функции распределения $f(x, u) = f(x^0, x^1, x^2, x^3, u^0, u^1, u^2, u^3)$ и уравнений тяготения, имеет вид

$$u^\alpha \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma \frac{\partial f(x, u)}{\partial u^\alpha} = 0; \quad (1)$$

$$R^{\alpha\beta}(x) - \frac{1}{2} R(x) g^{\alpha\beta}(x) = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} T^{\alpha\beta}(x); \quad (2)$$

где

$$T^{\alpha\beta}(x) = m \int u^\alpha u^\beta f(x, u) \sqrt{-g} d^4u. \quad (3)$$

Элементом объема, инвариантным относительно допустимых преобразований переменных в пространстве опорных элементов

$$x^{\alpha'} = \varphi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) u^{\alpha'} = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^{\beta'}} u^{\beta'}, \quad (4)$$

является величина

$$\sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \sqrt{-g} du^0 du^1 du^2 du^3.$$

Сигнатура метрического тензора: $-1, 1, 1, 1$.

Исключение дополнительной степени свободы

Функция распределения $f(x, u)$ содержит четыре независимых переменных u^0, u^1, u^2, u^3 . Кроме того, в уравнение (1) входят производные по всем этим переменным. С физической точки зрения это означает, что каждая из рассматриваемых частиц массы m имеет дополнительную степень свободы, связанную со взаимоотношением лабораторного и собственного времени. В связи с этим к уравнению непрерывности (1) необходимо присоединить дополнительное условие, налагаемое на функцию распределения и позволяющее исключить четвертую степень свободы. Мы рассмотрим два таких условия.

Предположим сначала, что функция распределения имеет вид

$$f(x, u) = 2\Phi(x^0, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, u^3) \delta(g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + c^2)$$

или при $u^0 > 0$

$$f(x, u) = \Phi(x^0, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, u^3) \frac{1}{u^0} \delta\left(u^0 - \frac{u_0 - g_{0k} u^k}{g_{00}}\right), \quad (5)$$

где

$$u_0 = [(g_{0k} g_{0m} - g_{00} g_{km}) u^k u^m - g_{00} c^2]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$(k, m = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3).$$

Подставим в уравнение (1) функцию распределения в виде (5) и проинтегрируем по u^0 . Получим

$$u^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^k u^\beta u^\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial u^k} = 0. \quad (7)$$

В сущности условие (5) сводится к требованию, чтобы функция $f(x, u)$ удовлетворяла уравнению

$$u^0 \frac{\partial f(x, u)}{\partial u^0} = 0 \quad (u^0 \neq 0), \quad (8)$$

и к выбору элемента объема

$$V \sqrt{-g} \frac{du^1 du^2 du^3}{u_0}, \quad (9)$$

инвариантного относительно преобразования компонентов u^1, u^2, u^3 , согласно (4).

Однако уравнение (8) не является ковариантным. Поэтому рассмотрим другой способ исключения дополнительной степени свободы частиц. Требование (8) заменим ковариантным уравнением

$$u^\alpha \frac{\partial f(x, u)}{\partial u^\alpha} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) появляется автоматически при переходе к пространству линейных элементов. Действительно, элементом такого многообразия можно считать произвольную точку базисного пространства и линейное направление, исходящее из этой точки [2]. Линейное направление аналитически может быть задано отношениями компонентов вектора четырехмерной скорости, из которых не все обращаются в нуль. Мы имеем $u^0 \neq 0$, и поэтому отношения есть

$$\frac{u^1}{u^0}, \quad \frac{u^2}{u^0}, \quad \frac{u^3}{u^0}.$$

Функция распределения $f(x, u)$ задает скалярное поле в пространстве линейных элементов. Следовательно, она должна быть однородной нулевой степени относительно второго ряда аргументов и, согласно теореме Эйлера об однородных функциях, удовлетворять уравнению (10).

Подставим значение частной производной функции распределения по u^0 из (10) в (1). Приходим к уравнению

$$u^\alpha \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^\alpha} - (\Gamma_{\beta\gamma}^k - \frac{u^k}{u^0} \Gamma_{\beta\gamma}^0) u^\beta u^\gamma \frac{\partial f(x, u)}{\partial u^k} = 0. \quad (11)$$

Отличие уравнения (11) от уравнения (7) очевидно. Уравнение (7) определяет трехмерную по второму ряду аргументов функцию $\Phi(x, u^1, u^2, u^3)$. Величина u^0 в (7) не является независимой. Уравнение (11) есть уравнение непрерывности для однородной четырехмерной по компонентам скоростей функции $f(x, u)$, и все u^0, u^1, u^2, u^3 в этом уравнении следует рассматривать как независимые переменные.

При выборе инвариантного элемента объема проще всего поступить следующим образом. Вместо переменных u^0, u^1, u^2, u^3 введем новые независимые переменные $(u^2), \frac{u^1}{u^0}, \frac{u^2}{u^0}, \frac{u^3}{u^0}$, где $(u^2) = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$.

Находим выражение Якобиана этого преобразования

$$\frac{\partial(u^0, u^1, u^2, u^3)}{\partial\left((u^2), \frac{u^1}{u^0}, \frac{u^2}{u^0}, \frac{u^3}{u^0}\right)} = \frac{(u^0)^4}{2(u^2)^2}$$

и вместо инвариантного элемента объема $V \sqrt{-g} du^0, du^1, du^2, du^3$ получаем элемент

$$V \sqrt{-g} (u^0)^4 \frac{d(u^2)}{2(u^2)^2} d\left(\frac{u^1}{u^0}\right) d\left(\frac{u^2}{u^0}\right) d\left(\frac{u^3}{u^0}\right).$$

Но величина $d(u^2)$ есть инвариант. Следовательно, искомым элементом объема

$$d\Omega = V \sqrt{-g} \frac{(u^0)^4}{(-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^2} d\left(\frac{u^1}{u^0}\right) d\left(\frac{u^2}{u^0}\right) d\left(\frac{u^3}{u^0}\right).$$

Частицы в стационарном гравитационном поле

В качестве примера точного решения уравнения (11) приведем функцию распределения невзаимодействующих частиц во внешнем стационарном гравитационном поле.

Для метрического тензора имеем условия

$$g_{0k}(x) = 0; \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^0} = 0. \quad (12)$$

Коэффициенты при частных производных функции распределения по составляющим вектора скорости в (11) равны

$$\left(g^{k\sigma} - g^{0\sigma} \frac{u^k}{u^0}\right) \Gamma_{\sigma,\beta\gamma} u^\beta u^\gamma. \quad (13)$$

Так как

$$\Gamma_{\sigma,\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\sigma\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right), \quad (14)$$

выражение (13) принимает вид

$$\left(g^{k\sigma} - g^{0\sigma} \frac{u^k}{u^0} \right) \left(u^\gamma \frac{\partial u_\sigma}{\partial x^\gamma} - \frac{1}{2} \frac{\partial (u)^2}{\partial x^\sigma} \right). \quad (15)$$

Уравнение (11) с учетом (12) и (15) можно переписать в виде

$$u^\alpha \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^\alpha} - \left(g^{km} u^p u^l \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} g^{km} \frac{\partial (u)^2}{\partial x^m} - g^{00} u^k u^l \frac{\partial g_{00}}{\partial x^l} \right) \frac{\partial f(x, u)}{\partial u^k} = 0. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) можно представить в форме

$$f(x, u) = A \exp \frac{amc^2 \sqrt{-g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{g_{kl} u^k u^l}{-g_{00} u^0 u^0}}}, \quad (17)$$

где A, a — постоянные.

Мы получили функцию распределения частиц во внешнем стационарном поле тяготения в виде однородной по составляющим вектора скорости функции. Эта функция удовлетворяет уравнению (16) при любых u^0, u^1, u^2, u^3 . Величина $-u \equiv (-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{1/2}$ при этом может быть произвольной.

Тензор энергии-импульса и вектор потока частиц

В пространстве линейных элементов тензор энергии-импульса и вектор потока частиц определяются выражениями

$$T^{\alpha\beta} = mc^5 \int \frac{u^\alpha u^\beta}{(-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)} f(x, u) d\Omega, \quad (18)$$

$$P^\alpha = c^4 \int \frac{u^\alpha}{(-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{1/2}} f(x, u) d\Omega. \quad (19)$$

Из уравнения (11) следуют законы сохранения этих величин. Например, чтобы получить закон сохранения вектора потока частиц, умножим уравнение (11) на $(-u)$ и проинтегрируем по $d\Omega$. Получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha P^\beta - 5\Gamma_{\beta\gamma}^0 \int \frac{u^\beta u^\gamma}{u^0} f(x, u) (-u)^{-1} d\Omega + \\ & + \int \left(\Gamma_{\beta\gamma}^k - \Gamma_{\beta\gamma}^0 \frac{u^k}{u^0} \right) u^\beta u^\gamma f(x, u) (-u^4) \frac{\partial (-u)^{-5}}{\partial u^k} d\Omega - \\ & - \int u^\alpha f(x, u) (-u)^4 \frac{\partial (-u)^{-5}}{\partial x^\alpha} d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Мы опустили поверхностные интегралы по скоростям. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial (-u)^{-5}}{\partial u^k} &= 5(-u)^{-7} u_k, \\ \frac{\partial (-u)^{-5}}{\partial x^\alpha} &= \frac{5}{2} (-u)^{-7} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\alpha} u^\lambda u^\rho, \end{aligned}$$

это выражение преобразуется к виду

$$\frac{\partial P^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_\gamma^{\gamma\beta} P^\beta + 5\Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \int g_{\sigma\rho} u^\beta u^\gamma u^\rho (-u)^{-3} f(x, u) d\Omega - \\ - \frac{5}{2} \int f(x, u) u^\alpha \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\alpha} u^\sigma u^\rho (-u)^{-3} d\Omega = 0.$$

Два последних интеграла сокращаются вследствие (14), и мы получаем равенство нулю ковариантной дивергенции от вектора потока частиц.

Сохранение энергии-импульса проверяется аналогично.

Уравнение Власова как предельный случай ковариантных статистических уравнений

Предположим, что гравитационные взаимодействия между частицами являются слабыми, т. е.

$$g_{\alpha\beta}(x) = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x).$$

Величины $h_{\alpha\beta}(x)$ и их производные малы по сравнению с единицей и имеют первый порядок малости; $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ — галилеев метрический тензор.

В этом случае можно положить

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \cong \overset{\circ}{g}^{\alpha\sigma} \Gamma_{\sigma, \beta\gamma}; \quad \frac{u^k}{u^0} = \frac{v^k}{c}.$$

Так как общее решение уравнения (10) при $u^0 \neq 0$ можно представить в форме

$$f(x, u) = f\left(x, \frac{u^1}{u^0}, \frac{u^2}{u^0}, \frac{u^3}{u^0}\right),$$

уравнение

$$u^\alpha \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^\alpha} - \left(\frac{\partial h_{k\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{u^k}{u^0} \frac{\partial h_{0\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^k} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^0} \cdot \frac{u^k}{u^0} \right) \frac{\partial f(x, u)}{\partial u^k} = 0 \quad (20)$$

приводится к виду

$$\frac{\partial f(t, x, v)}{\partial t} + v^k \frac{\partial f(t, x, v)}{\partial x^k} + \left[\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} - c \frac{\partial h_{k0}}{\partial t} - \frac{1}{2} v^k \frac{\partial h_{00}}{\partial t} - \right. \\ \left. - v^l \frac{\partial h_{kl}}{\partial t} - c v^l \left(\frac{\partial h_{k0}}{\partial x^l} - \frac{\partial h_{0l}}{\partial x^k} \right) - v^k v^l \frac{\partial h_{00}}{\partial x^l} - v^k v^m \left(\frac{\partial h_{kl}}{\partial x^m} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ml}}{\partial x^k} \right) - \right. \\ \left. - \frac{v^l v^m v^k}{c} \frac{\partial h_{0l}}{\partial x^m} + \frac{v^l v^m v^k}{c^2} \frac{\partial h_{ml}}{\partial t} \right] \frac{\partial f(t, x, v)}{\partial v^k} = 0, \quad (21)$$

где коэффициенты при $\partial f/\partial v^k$ являются проекциями поля ускорений частиц на координатные оси.

С принятой точностью имеем также

$$R_{\alpha\beta} \cong \frac{1}{2} \left(\square h_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 h_\alpha^\sigma}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 h_\beta^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right), \quad (22)$$

где $h = h_{\alpha\beta} \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta}$; $h_{\alpha}^{\sigma} = h_{\alpha\beta} \overset{\circ}{g}^{\beta\sigma}$, \square — оператор Даламбера. В гармонической координатной системе [3] три последних члена в (22) обращаются в нуль. Учитывая это, вместо (2) получаем уравнения

$$\frac{1}{2} \square h_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} (T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}), \quad (23)$$

в которых согласно (18) в рассматриваемом приближении следует положить

$$\begin{aligned} T_{00} &= mc^2 \int \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} f(t, x, v) \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} d^3v, \\ T_{0k} &= -mc \int \frac{v^k}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} f(t, x, v) \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} d^3v, \\ T_{kl} &= m \int \frac{v^k v^l}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} f(t, x, v) \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} d^3v, \\ T &= -mc^2 \int f(t, x, v) \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} d^3v. \end{aligned}$$

Уравнения (21), (23) вместе со значениями тензора энергии-импульса, выписанными выше, образуют замкнутую систему уравнений для релятивистских частиц, гравитационные взаимодействия между которыми являются слабыми. Чтобы получить нерелятивистское приближение, положим $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$. Тогда, ограничиваясь квазистатическим случаем, приходим к системе уравнений

$$\Delta h_{00} = -4\pi \left(\frac{2\gamma m}{c^2} \right) \int f(t, x, v) d^3v, \quad (24)$$

$$\Delta h_{k0} = 4\pi \left(\frac{4\gamma m}{c^3} \right) \int v^k f(t, x, v) d^3v, \quad (25)$$

$$\Delta h_{kl} = -\delta_{kl} 4\pi \left(\frac{2\gamma m}{c^2} \right) \int f(t, x, v) d^3v, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v^k \frac{\partial f}{\partial x^k} + \left[\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} - c \frac{\partial h_{k0}}{\partial t} - \frac{1}{2} v^k \frac{\partial h_{00}}{\partial t} - \right. \\ \left. - v^l \frac{\partial h_{kl}}{\partial t} - c v^l \left(\frac{\partial h_{k0}}{\partial x^l} - \frac{\partial h_{0l}}{\partial x^k} \right) \right] \frac{\partial f}{\partial v^k} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

В последнем уравнении мы опустили члены, содержащие произведения скоростей, которые при подстановке в (27), значений $h_{\alpha\beta}$ из (24), (25), (26) имеют порядок малости выше $\frac{v^2}{c^2}$.

Решения уравнений (24), (25), (26) имеют вид

$$h_{00} = \frac{2U}{c^2}; \quad h_{k0} = -\frac{4U_k}{c^3}; \quad h_{kl} = \delta_{kl} \frac{2U}{c^2};$$

где U — ньютонов потенциал

$$U = m\gamma \iint \frac{f(t, x', v)}{\left[\sum_{l=1}^3 (x^l - x^{l'})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} d^3x' d^3v,$$

а через $U_i(x, t)$ обозначено решение уравнения

$$\Delta U_k = -4\pi\gamma m \int v^k f(t, x, v) d^3v.$$

Теперь уравнение (27) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v^k \frac{\partial f}{\partial x^k} + \frac{\partial f}{\partial v^k} \left[\frac{\partial U}{\partial x^k} - \frac{3v^k}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{4}{c^2} \frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{4v^l}{c^2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x^l} - \frac{\partial U_l}{\partial x^k} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Вследствие сделанных предположений величины, содержащие c^{-2} , можно опустить, и мы приходим к уравнению Власова для частиц, взаимодействие между которыми носит гравитационный характер.

Итак, система ковариантных статистических уравнений, состоящая из уравнения непрерывности для функции распределения в восьмимерном многообразии опорных элементов и уравнений гравитационного поля, содержит дополнительную степень свободы частиц. Эта дополнительная степень свободы может быть исключена путем присоединения к уравнению непрерывности ковариантного условия в форме уравнения Эйлера для однородных функций нулевого измерения относительно аргументов, представляющих собой компоненты четырехмерного вектора скорости. Статистическая независимость всех четырех компонентов вектора скорости, присущая исходной системе уравнений, при этом сохраняется. Переход к семимерному способу описания сказывается лишь на форме уравнения непрерывности и на операции инвариантного интегрирования.

Из уравнения непрерывности для функции распределения в пространстве линейных элементов, так же как и в общем случае пространства опорных элементов, следуют законы сохранения вектора потока частиц и тензора энергии-импульса.

В нерелятивистском приближении самосогласованная ковариантная система уравнений сводится к уравнению Власова для гравитирующих частиц.

Выражаю благодарность проф. А. А. Власову за предоставление темы и руководство работой, а также доц. Ю. М. Лоскутову за ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., «Наука», 1966.
2. Cartan E. Les Espaces de Finsler. Paris, Herman, 1934.
3. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию
5.11 1970 г.

Кафедра
теоретической физики

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1972

УДК 534.222

И. Ю. СОЛОДОВ

КОЛЛИНЕАРНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В КВАРЦЕ

Описана методика исследования нелинейного взаимодействия упругих поверхностных волн, распространяющихся в направлении оси y кварца x -среза. Для возбуждения и приема поверхностных волн в частотном диапазоне нескольких десятков мегагерц использовались противофазные пьезоэлектрические преобразователи. Наблюдалась генерация поверхностных волн суммарной и разностной частот. Исследована зависимость эффекта от мощностей взаимодействующих волн и расстояния взаимодействия. Проведена оценка параметра нелинейного взаимодействия поверхностных волн.

Изучение нелинейного распространения упругих поверхностных волн началось сравнительно недавно [1, 2]. К настоящему времени установлено, что при распространении поверхностных волн в кристаллах кварца и ниобата лития происходит эффективная генерация второй гармоники [2, 3, 4] и образование волн комбинационных частот [5].

В данной работе приводятся результаты экспериментального изучения коллинеарного взаимодействия упругих поверхностных волн, распространяющихся в направлении оси y кварца x -среза. Возбуждение и прием поверхностных волн производился с использованием пьезоэлектрических противофазных преобразователей.

Согласно [6] при распространении поверхностной волны вдоль оси y кварца имеется отличный от нуля угол между фазовой и групповой скоростью волны. Величина этого угла экспериментально может быть определена по смещению пучка поверхностных волн от направления y , в данном случае она равна -8° . Поэтому для того, чтобы два пучка поверхностных волн, излучаемые преобразователями сигнала и накачки с частотами f_c и f_n соответственно в направлении оси y распространялись параллельно и непрерывно при этом взаимодействовали, оба эти преобразователя, а также приемный преобразователь, работающий на частоте f_k , располагались на одной прямой под углом -8° к оси y (рис. 1).

Взаимодействующие поверхностные волны возбуждались преобразователями сигнала и накачки, которые изготовлялись непосредственно на поверхности кварцевого образца и содержали по 30 пар электродов длиной 8 мм, и периодом 145 и 75 мк. При фазовой скорости поверхностных волн в направлении оси y $-3,25 \cdot 10^5$ см/сек основные частоты этих преобразователей составляли 22,5 и 44 мГц. Приемный преобразо-

ватель, период решетки которого 50 мк, настраивался на суммарную частоту $f_k = 66,5$ мгц. На излучающие преобразователи сигнала и накачки подавались электрические импульсы соответствующих частот мощностью порядка 1 вт и длительностью 1—10 мксек. Для подавления отражений поверхностных волн боковые стороны кварцевой пластинки покрывались поглотителем (слой пинеина). Одновременное распространение акустических импульсов к приемному преобразователю достигалось введением задержки электрического импульса накачки относительно сигнала на время распространения поверхностной волны между преобразователями сигнала и накачки. При выполнении этого условия приемный преобразователь регистрировал появление поверхностной волны суммарной частоты.

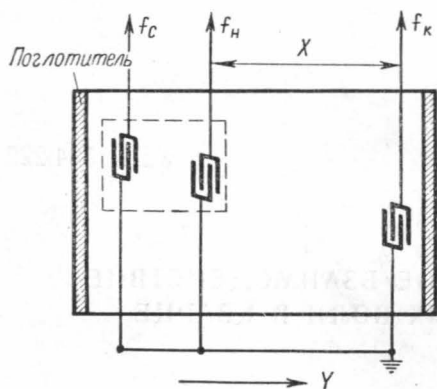


Рис. 1. Схема расположения преобразователей на поверхности образца

равно 30 мм, при этом оптимальное время задержки импульса накачки изменялось от 9 до 12 мксек при различной длительности взаимодействующих импульсов. Такое изменение оптимальной задержки объясняется искажением формы акустических импульсов при излучении, протяженным в направлении распространения преобразователем.

Акустические мощности поверхностных волн оценивались по измерениям электрической мощности входных сигналов и потерь на излучение. Для определения потерь при генерации поверхностных волн противофазным преобразователем предварительно измерялась величина потерь на двойное преобразование при использовании идентичных преобразователей в качестве излучателя и приемника. Половину этой величины составляют потери на излучение, зная которые нетрудно подсчитать акустическую мощность волны. Полученное таким образом значение акустической мощности поверхностной волны суммарной частоты равно $2,4 \cdot 10^{-6}$ вт при расстоянии взаимодействия $X = 40$ мм и акустической мощности сигнала $6 \cdot 10^{-3}$ вт и накачки $7,5 \cdot 10^{-2}$ вт.

Для исследования зависимости амплитуды образованной поверхностной волны от величины расстояния взаимодействия X схема эксперимента несколько изменялась.

Оба излучающих преобразователя в этом случае изготовлялись на внутренней поверхности стеклянной пластины (на рис. 1 пунктир). Хотя при этом потери на преобразование увеличиваются в среднем на 5—10 дб, перемещая пластину по поверхности образца вдоль пучка распространяющихся волн, можно плавно изменять расстояние взаимодействия поверхностных волн сигнала и накачки.

Частота поверхностной волны сигнала f_c была равна 11,5 мгц. Преобразователь сигнала работал в непрерывном режиме.

Приемный преобразователь, рассчитанный на частоту $f_k = 44$ мгц, наносился, как и прежде, на поверхность кварцевого образца. Используя поочередно два преобразователя поверхностных волн накачки с

частотами $(f_n)_1 = 32,5$ мГц и $(f_n)_2 = 55,5$ мГц, мы имели возможность наблюдать генерацию поверхностных волн суммарной $f_k^+ = f_c + (f_n)_1$ и разностной $f_k^- = (f_n)_2 - f_c$ частот.

На рис. 2 представлены зависимости амплитуды выходного сигнала приемного преобразователя V_k^\pm от расстояния взаимодействия X . Из графиков видно, что амплитуда смещений поверхностных волн суммарной и разностной частот, полученных в результате взаимодействия волн сигнала и накачки, линейно возрастает с увеличением расстояния взаимодействия.

Подобные зависимости характерны для сред с малым затуханием, когда эффекты нелинейного искажения или взаимодействия преобла-

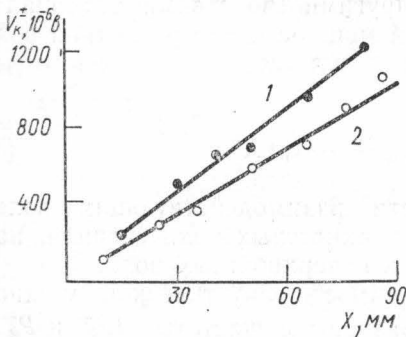


Рис. 2. Зависимость выходного напряжения приемного преобразователя разностной (1) и суммарной (2) частоты от расстояния взаимодействия. $1 - p_c \cdot p_n = 2 \cdot 10^{-5}$, $2 - p_c \cdot p_n = 1,1 \cdot 10^{-4}$ Вт²

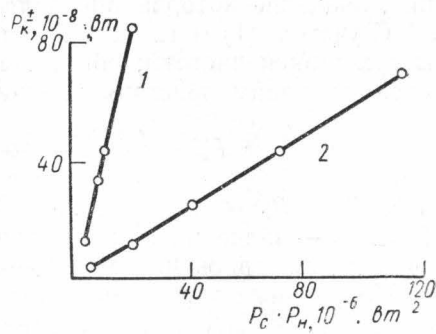


Рис. 3. Зависимость акустической мощности поверхностных волн разностной (1) и суммарной (2) частоты от величины произведения акустических мощностей взаимодействующих волн. Для обоих прямых $X = 80$ мм

дают над потерями при распространении волн. Поэтому в условиях нашего эксперимента вполне оправданно пренебречь затуханием поверхностных волн.

Полагая, что взаимодействие упругих поверхностных волн подчиняется общим закономерностям взаимодействий «объемных» фононов [7], получаем выражение для амплитуды образующейся поверхностной волны суммарной частоты:

$$(u_0)_k^+ = \frac{\Gamma}{4} (u_0)_c (u_0)_n k_c k_n X. \quad (1)$$

Здесь $(u_0)_c$, $(u_0)_n$ — амплитуды поверхностных волн сигнала и накачки у излучателя¹, k_c и k_n — волновые числа поверхностных волн сигнала и накачки соответственно. Коэффициент Γ , характеризующий эффек-

¹ Амплитуда поверхностной волны u_0 определяется из общего выражения для смещений в поверхностной волне, распространяющейся вдоль оси y кварца x -среза:

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^3 u_0 \bar{u}_n \exp [j(\omega t - ky - \beta_n kx)].$$

Здесь β_n — постоянные затухания смещений по глубине, а \bar{u}_n — относительные величины векторов смещений несинхронных волн, составляющих поверхностную волну.

тивность взаимодействия, определяется нелинейными свойствами исследуемого материала, в частности, он зависит от упругих модулей второго и третьего порядков кварца.

Запишем формулу (1) таким образом, чтобы в нее входили величины акустических мощностей поверхностных волн, которые наиболее удобно определять экспериментально. Для этого представим выражение акустической мощности поверхностной волны [8] следующим образом:

$$P = a\omega u_0^2, \quad (2)$$

где u_0 — амплитуда поверхностной волны, ω — частота поверхностной волны, l — ширина излучающего преобразователя, a — постоянная величина, значение которой определяется упругими свойствами материала.

С учетом (1) и (2) для акустической мощности поверхностной волны суммарной частоты, образующейся в результате коллинеарного нелинейного взаимодействия, получим

$$P_k^+ = \left(\frac{\Gamma}{4}\right)^2 \frac{l_k}{acl_n} P_c P_n k_c k_n (k_c + k_n) X^2. \quad (3)$$

Здесь P_c и P_n — акустические мощности взаимодействующих волн, l_c , l_n и l_k — значения ширины пучков поверхностных волн сигнала, накачки и суммарной частоты, c — скорость поверхностных волн.

Полученные экспериментально зависимости акустической мощности поверхностных волн суммарной и разностной частоты (P_k^+ и P_k^-) от величины произведения $P_c P_n$ приводятся на рис. 3. Как видно, при фиксированном значении расстояния взаимодействия X отношение $P_k(X)/P_c P_n$ остается постоянным для волн суммарной и разностной частот (согласно формуле (1)) и определяется величиной тангенса угла наклона прямых к оси абсцисс. Несколько большее значение этого отношения для волны разностной частоты может, по-видимому, объясняться более высоким значением частоты накачки (f_n)₂.

Данные рис. 2 и 3, а также результаты, полученные выше для взаимодействия поверхностных волн с частотами 22,5 и 44 мГц в импульсном режиме, позволяют по формуле (3) оценить величину параметра Γ .

Необходимое для такой оценки значение постоянной a определялось численным расчетом по известным величинам относительных смещений в поверхностной волне для кварца x -среза [9] и оказалось равным $2,2 \cdot 10^5$ *вт·сек/см*³. Нормировка векторов смещений \bar{u}_n при этом выбиралась таким образом, чтобы величина u_0 представляла собой амплитуду смещения в направлении оси y -кварца на поверхности образца.

Для обоих экспериментов значения параметра Γ , определенные из (3), оказываются практически совпадающими и равными $0,8 \pm 0,4$. Полученная величина нелинейного параметра кварца для поверхностных волн достаточно хорошо совпадает с рассчитанным в [2], исходя из данных для модулей упругости второго и третьего порядков кварца, значением $\Gamma = 0,72$.

Автор благодарен В. А. Красильникову и В. Е. Лямову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rischbieter F. *Acoustica*, **18**, 109, 1967.
2. Løren P. O. *J. Appl. Phys.*, **39**, No. 12, 5400, 1968.
3. Lean E. G., Tseng C. C., Powell C. G. *Appl. Phys. Lett.*, **16**, 32, 1970.

4. Красильников В. А., Лямов В. Е., Солодов И. Ю. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **11**, № 4, 470, 1970.
5. Lean E. G., Powell C. G., Kuhn L. Appl. Phys. Lett., **15**, No. 1, 10, 1969.
6. Coquin G. A., Tiersten H. F. J. Acoust. Soc. Am., **41**, No. 4, 921—939, 1967.
7. Moriametz M., Thery P., Bridoux E., Dellanoy M. Com. Rend., **268B**, 589, 1969.
8. White R. M. IEEE Trans. El. Dev., **ED-14**, 181, 1967.
9. Ingebrigtsen K. A., Tonning A. Appl. Phys. Lett., **11**, No. 9, 273, 1967.

Поступила в редакцию
3.12 1970 г.

Кафедра
акустики