

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1972

УДК 518.61:534.121

В. П. КАНДИДОВ, С. С. ЧЕСНOKОВ

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Предлагается конечный элемент тонкой пластины, применение которого позволяет повысить точность расчета колебаний без увеличения числа степеней свободы модели. Использование модифицированного элемента значительно сокращает машинное время, необходимое для расчета.

Метод конечных элементов является эффективным средством расчета динамики и статики распределенных систем. В нем удачно сочетаются идеи прямых методов Ритца, Бубнова—Галеркина с дискретными представлениями методов начального параметра, Майклстэда—Хольцера, конечных разностей.

Согласно методу конечных элементов [1], система разбивается на совокупность небольшого числа элементов. Прогиб каждого из них представляется линейной формой некоторых наперед выбранных функций. Это позволяет описать деформацию элемента конечным числом обобщенных координат, определенных в ряде точек, называемых узловыми. Сопряженные с выбранными координатами обобщенные силы вычисляются каким-либо вариационным способом. На обобщенные координаты и силы соседних элементов накладываются условия сопряжения; для элементов, находящихся на краях — граничные условия. В результате получается система алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений, которая описывает движение модели из элементов. Порядок системы совпадает с числом независимых обобщенных координат, т. е. числом колебательных степеней свободы модели J .

Точность метода растет с увеличением числа элементов [1] и [2]. Она существенно зависит также от того, насколько близко отдельный элемент отражает свойства соответствующей непрерывной части исходной системы. В [1]—[5] сравниваются элементы для расчета колебаний тонких пластин, имеющие по 4, 12, 16, 24 координаты каждый. На ряде примеров показано, что при одном и том же J наибольшую точность имеет модель из элементов с 16 координатами. Однако практическое применение этих элементов связано с трудностями, так как при расчете неоднородных конструкций для достижения требуемой точности необходима мелкая сетка из конечных элементов, и число степеней свободы в системе становится слишком большим. Это число ограничено объемом

оперативной памяти вычислительных машин. При использовании стандартных программ, для которых счетное время минимально, I не превышает $30 \div 40$. Поэтому большое внимание уделяется сейчас проблеме уменьшения числа степеней свободы модели без значительного ухудшения точности.

Один из возможных путей решения этой проблемы излагается в [6], где некоторые узлы модели считаются свободными от инерционных нагрузок. Поскольку выбор таких узлов основывается целиком на интуиции, этот путь представляется довольно искусственным. В [7] для повышения точности модели из элементов с четырьмя степенями свободы используется метод последовательных приближений, с помощью которого для каждого тона вычисляется эффективная инерционная нагрузка в узлах.

В настоящей работе предлагается модифицированный конечный элемент пластины с четырьмя степенями свободы, применение которого повышает точность модели без увеличения I .

1. Развиваемый метод коротко представляет следующее [1]. Пусть конечный элемент имеет вид прямоугольника, углы которого являются узловыми точками (рис. 1).

Форма прогиба элемента будет:

$$\omega(x, y, t) = \psi_{1s}(x, y) A_{s1}(t),$$

где $\psi_{1s}(x, y)$ — строка выбранных базисных функций, $A_{s1}(t)$ — некоторый столбец.

В качестве обобщенных координат элемента обычно берутся величины, имеющие простой физический смысл, например: смещение в узлах $w_r(t)$, углы наклона $\varphi_r(t) = \left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_r$ и $\vartheta_r(t) = \left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_r$ ($r=1, 2, 3, 4$); всего по три координаты на каждый узел. Эти величины образуют вектор

$$q_{l1}(t) = \begin{Bmatrix} w_{r1}(t) \\ \varphi_{r1}(t) \\ \vartheta_{r1}(t) \end{Bmatrix} \quad (l = 1, 2, \dots, 12) \quad (1)$$

Если матрицу преобразования обобщенных координат $q_{l1}(t)$ к $A_{s1}(t)$ обозначить через $a_{s'l}$, то форму прогиба $\omega(x, y, t)$ можно записать в виде

$$\omega(x, y, t) = \psi_{1s}(x, y) a_{s'l} q_{l1}(t). \quad (2)$$

Сопряженный с $q_{l1}(t)$ вектор обобщенных сил будет:

$$Q_{l1}(t) = \begin{Bmatrix} P_{r1}(t) \\ N_{r1}(t) \\ T_{r1}(t) \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь $P_{r1}(t)$ — вектор перерезывающих сил, приложенных к узлам элемента; $N_{r1}(t)$, $T_{r1}(t)$ — векторы изгибающих моментов в узлах.

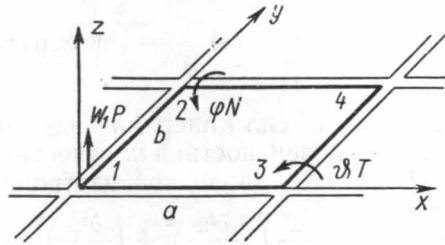


Рис. 1

Пусть рассматриваются свободные движения. Тогда из динамического принципа виртуальных перемещений следует

$$\delta q_{1l}(t) Q_{1l}(t) - \delta U(t) + \delta A(t) = 0, \quad (4)$$

где $\delta U = \delta \int_0^a \int_0^b \varepsilon(x, y, t) dx dy$ — вариация потенциальной энергии, плотность которой $\varepsilon(x, y, t)$

$$\delta A = - \int_0^a \int_0^b \delta \omega \rho(x, y) \frac{\partial^2 \omega(x, y, t)}{dt^2} dx dy,$$

есть работа сил инерции на виртуальном перемещении, $\delta \omega$, если $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность.

В случае однородной изотропной пластины жесткости D [8]:

$$\varepsilon(x, y, t) = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$

или, используя (2):

$$\varepsilon(x, y, t) = q_{1l}(t) a_{1s} \varepsilon_{ss}(x, y) a_{s1} q_{1l}(t),$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss}(x, y) = & \frac{D}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi_{s1}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_{1s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{s1}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_{1s}}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + \nu \left(\frac{\partial^2 \psi_{s1}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_{1s}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_{s1}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_{1s}}{\partial x^2} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi_{s1}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_{1s}}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned}$$

матрица плотности потенциальной энергии элемента.

Отсюда $\delta U = \delta q_{1l}(t) K_{ll} q_{1l}(t)$; K_{ll} называется матрицей жесткости элемента:

$$K_{ll} = a_{1s} \int_0^a \int_0^b \varepsilon_{ss}(x, y) dx dy a_{s1}. \quad (5)$$

Аналогично

$$\delta A = - \delta q_{1l}(t) M_{ll} \frac{d^2 q_{1l}}{dt^2},$$

где

$$M_{ll} = a_{1s} \int_0^a \int_0^b \rho(x, y) \psi_{s1} \psi_{1s} dx dy a_{s1}, \quad (6)$$

матрица масс конечного элемента.

Из (4) с учетом (5) и (6) следует

$$Q_{1l}(t) = K_{ll} q_{1l} + M_{ll} \frac{d^2 q_{1l}}{dt^2}. \quad (7)$$

Матрицы жесткости и масс определяются геометрическими, упругими и инерционными характеристиками элемента, а также видом базисных функций $\psi_{1s}(x, y)$. В качестве их обычно берут степенные функции

$$\psi_{1s}(x, y) = \left\{ 1, \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{x^2}{a^2}, \frac{xy}{ab}, \frac{y^2}{b^2}, \frac{x^3}{a^3}, \frac{x^2 y}{a^2 b}, \frac{xy^2}{a b^2}, \frac{y^3}{b^3}, \frac{x^3 y}{a^3 b}, \frac{xy^3}{a b^3} \right\}, \quad (8)$$

здесь $s = 1, 2, \dots, 12$.

Этот выбор неоднозначен; в [3], например, в качестве $\psi_{1s}(x, y)$ берутся полиномы Лежандра.

Матрицы K_{ll} и M_{ll} имеют одинаковую структуру. Их удобно разбить на блоки. Например:

$$M_{ll} = \begin{pmatrix} M_{rr}^{(p\omega)} & M_{rr}^{(p\varphi)} & M_{rr}^{(p\theta)} \\ M_{rr}^{(N\omega)} & M_{rr}^{(N\varphi)} & M_{rr}^{(N\theta)} \\ M_{rr}^{(T\omega)} & M_{rr}^{(T\varphi)} & M_{rr}^{(T\theta)} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

здесь $M_{rr}^{(p\omega)}$ — блок, связывающий перерезывающие силы P_{r1} и смещения ω_{r1} , $M_{rr}^{(p\varphi)}$ — силы P_{r1} и наклоны φ_{r1} и т. д. Если при получении матрицы M_{ll} используется пространство базисных функций (8), то все ее блоки отличны от нуля. Тогда элемент имеет 12 степеней свободы, по три на каждый узел. Модель из таких элементов будем называть 3-модель.

Условия сопряжения для обобщенных координат соседних элементов формируются из требования непрерывности смещения всей модели в целом; для обобщенных сил — из требования уравновешенности всех сил в каждой узловой точке. Используя эти условия, можно получить матрицы жесткости K_{LL} и масс M_{LL} модели из конечных элементов. Эти матрицы имеют такую же блочную структуру, как и соответствующие матрицы отдельного элемента. Уравнение свободных движений модели будет

$$K_{LL}q_{L1}(t) + M_{LL} \frac{d^2q_{L1}}{dt^2} = 0, \quad (10)$$

где $q_{L1} = \begin{pmatrix} \omega_{R1} \\ \varphi_{R1} \\ \theta_{R1} \end{pmatrix}$ — вектор обобщенных координат модели, R — число свободных узлов модели.

Решение матричного уравнения (10) совместно с граничными условиями, записанными для обобщенных координат и сил крайних элементов, дает частоты и формы собственных колебаний модели.

2. Ранг матрицы M_{LL} определяет число степеней свободы модели; для 3-модели $I=3R$. Можно ожидать, что сокращение числа степеней свободы в каждом узле позволит, увеличив число элементов, достичь не меньшей точности при том же I . Простая модель, в которой на каждый узел приходится по одной степени свободы, рассмотрена в [1] и [9]. В этой модели, которую обозначим I -модель, масса системы сосредоточена в узлах. Это соответствует тому, что при вычислении матрицы масс конечного элемента M_{LL} используется такая система четырех базисных функций

$$\psi_{1s} = \{\psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{14}\}, \quad (11)$$

где

$$\psi_{11} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, 0 \leq y \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{везде кроме } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, 0 \leq y \leq \frac{b}{2} \text{ и т. д.} \end{cases} \quad (11)$$

Из (6) и (11) следует, что в M_{ll} отличен от нуля только блок $M_{rr}^{(p\omega)}$. Он имеет вид

$$M_{rr}^{(p\omega)} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $\mu_1 = \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} \rho(x, y) dx dy$ и т. д.

Соответственно в матрице масс M_{LL} I -модели отличен от нуля блок $M_{RR}^{(p\omega)}$. Диагональные элементы $M_{RR}^{(p\omega)}$ суть массы в узлах. Ранг матрицы M_{LL} этой модели равен R . Таким образом, число степеней свободы I -модели совпадает с числом свободных узлов $I=R$.

Матричное уравнение (10) удобно переписать в виде системы трех матричных уравнений:

$$K_{RR}^{(p\omega)} \omega_{R1} + K_{RR}^{(p\varphi)} \varphi_{R1} + K_{RR}^{(p\theta)} \theta_{R1} = -M_{RR}^{(p\omega)} \frac{d^2 \omega_{R1}}{dt^2},$$

$$K_{RR}^{(N\omega)} \omega_{R1} + K_{RR}^{(N\varphi)} \varphi_{R1} + K_{RR}^{(N\theta)} \theta_{R1} = 0,$$

$$K_{RR}^{(T\omega)} \omega_{R1} + K_{RR}^{(T\varphi)} \varphi_{R1} + K_{RR}^{(T\theta)} \theta_{R1} = 0.$$

После исключения переменных $\varphi_{R1}(t)$ и $\theta_{R1}(t)$ уравнение свободных движений I -модели будет

$$K_{RR}^* \omega_{R1} + M_{RR}^{(p\omega)} \frac{d^2 \omega_{R1}}{dt^2} = 0, \quad (13)$$

где

$$K_{RR}^* = [K_{RR}^{(p\omega)} - K_{RR}^{(p\varphi)} (K_{RR}^{(N\varphi)})^{-1} (K_{RR}^{(p\varphi)})^T] - \\ - [K_{RR}^{(p\theta)} - K_{RR}^{(p\varphi)} (K_{RR}^{(N\varphi)})^{-1} K_{RR}^{(N\theta)}] [K_{RR}^{(T\theta)} - K_{RR}^{(N\theta)} (K_{RR}^{(N\varphi)})^{-1} K_{RR}^{(N\theta)}]^{-1} \times \\ \times [(K_{RR}^{(p\theta)})^T - K_{RR}^{(N\theta)} (K_{RR}^{(N\varphi)})^{-1} (K_{RR}^{(p\varphi)})^T].$$

Из сравнения (10) и (13) видно, что для I -модели порядок матриц в задаче на собственные значения втрое ниже, чем у 3 -модели.

3. В предлагаемом элементе матрица масс строится на основе следующей системы базисных функций:

$$\psi_{1s} = \left\{ 1, \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, -\frac{xy}{ab} \right\}. \quad (14)$$

Полученная из (6) и (14) матрица M_{ll} , так же как и матрица сосредоточенных масс, имеет только один отличный от нуля блок $M_{rr}^{(p\omega)}$:

$$M_{rr}^{(p\omega)} = \rho \frac{abh}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где h — толщина пластины.

Модель из таких модифицированных элементов обозначим как I_m -модель. Для уравнений ее свободных движений справедливы преобразования (13). Число степеней свободы I_m -модели совпадает с числом свободных узлов $I=R$.

4. Чтобы сравнить точность моделей, целесообразно рассматривать такие сетки разбиения на элементы, для которых близко число степеней свободы I . Две такие сетки для консольной однородной пластины квадратной формы приведены на рис. 2 (а — 3-модель, б — 1-модель или 1м-модель). В качестве критерия точности моделей взято относительное отклонение $\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ частот моделей ω от частот ω_0 , вычисленных методом Рунца [10]. Собственные частоты для 3-модели взяты из [11], для 1- и 1м-моделей вычислены на ЭЦВМ типа М-20 по про-

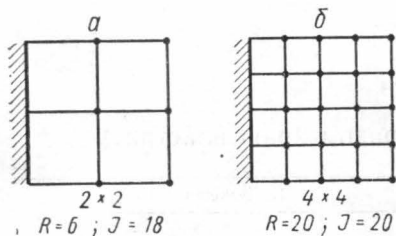


Рис. 2

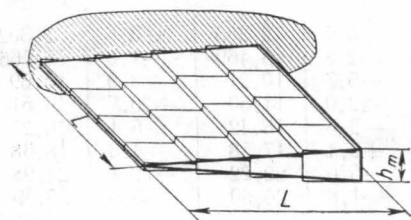


Рис. 4

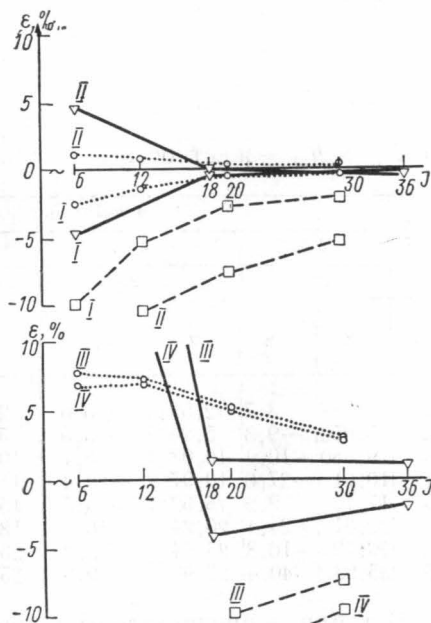


Рис. 3

грамме, приведенной в [13]. При $I=30$ машинное время, необходимое для получения частот и форм первых 10 тонов, не превышает 10 мин.

На рис. 3 для ряда значений I указаны отклонения ε на первых четырех тонах консольной пластины квадратной формы. Для наглядности точки, относящиеся к 3-модели, соединены отрезками сплошных линий; 1-модели — штрихами. Римскими цифрами обозначены номера тонов. Из графиков видно, что для 3-модели ε быстро убывает на участке до $I=18$. Начиная с $I=18$, отклонения стремятся к нулю значительно медленнее, а для второго тона имеет место некоторая расходимость. По второму и четвертому тонам ε меняет знак. Отклонения у 1-модели отрицательны; по модулю ε всегда больше, чем для 3-модели при одном и том же I .

Результаты расчета с помощью модели из модифицированных элементов представлены на рис. 3 пунктирными линиями. Видно, что убывание ε с ростом I для всех четырех тонов этой модели более равномерное, чем для 3-модели; знак ε остается неизменным с ростом I . На участке до $I=12$ (3×3) отклонения 1м-модели значительно меньше, чем у 3-модели. При дальнейшем увеличении I , ε у 1м-модели и 3-модели отличаются незначительно. По первым двум тонам ошибка для

обеих моделей при $l \geq 30$ не превышает 1%, по трем следующим — 3,5%.

При одном и том же l $1m$ -модель допускает гораздо более мелкое разбиение на элементы, чем 3 -модель. Особенно это существенно при исследовании неоднородных систем. В качестве примера рассмотрены свободные колебания консольно-закрепленной квадратной пластины, имеющей в сечении форму равномерно утончающегося клина (рис. 4). На том же рисунке изображено разбиение пластины на 4×4 однородных элементов. Для такой пластины удобно пользоваться приведенной частотой

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{D_m}{\rho h_m L^4}}}$$

где D_m и h_m — жесткость и толщина на правом краю пластины.

Разбиение	$1m$ -модель						3 -модель		Эксперимент
	3×3		4×4		5×5		5×5		
l	12		20		30		90		
Тон	α	$\varepsilon\%$	α	$\varepsilon\%$	α	$\varepsilon\%$	α	$\varepsilon\%$	
1	2,387	+3,7	2,384	+3,6	2,381	+3,4	2,385	+3,6	2,302
2	5,050	-9,3	5,260	-5,5	5,412	-2,8	5,469	-1,8	5,566
3	9,580	-10,4	10,03	-6,1	10,08	-5,7	10,21	-3,9	10,69
4	10,61	-27,6	10,97	-24,4	11,18	-22,9	11,50	-20,7	14,51
5	17,74	+9,2	15,52	-4,5	15,85	-2,5	15,42	-5,1	16,25
6	22,81	+24,1	20,24	+10,1	18,46	+0,4	17,58	-4,3	18,38
7	29,19	+16,8	25,54	+2,2	23,57	-5,6	22,22	-11,1	24,98
8	35,93	+40,4	27,90	+9,0	25,17	-1,6	26,60	+3,9	25,59

В таблице представлены приведенные частоты $1m$ -модели при различных разбиениях. Там же указаны экспериментальные частоты и частоты 3 -модели при разбиении 5×5 , взятые из [12]. В таблице приведены относительные отклонения ε частот моделей от экспериментальных значений.

Сравним отклонения частот ε у обеих моделей с одной и той же сеткой разбиения 5×5 . В этом случае 3 -модель имеет 90 степеней свободы, $1m$ -модель — всего 30. Однако точность у $1m$ -модели в целом такая же, что и у 3 -модели; для пяти тонов из восьми приведенных отклонения у нее меньше, чем у 3 -модели, для трех остальных — незначительно больше. Это дает основания полагать, что точность моделей неоднородной системы в основном определяется числом элементов.

При уменьшении числа элементов ошибка $1m$ -модели возрастает. Исключение составляет седьмой тон, что, по-видимому, связано со взаимным расположением узловых линий и линий разбиения. Для остальных тонов частоты $1m$ -модели сходятся к экспериментальным монотонно.

Модель из модифицированных конечных элементов, так же как и модель с сосредоточенными массами, имеет по одной степени свободы на каждый узел. Однако точность модифицированной модели значительно выше, чем модели с сосредоточенными массами.

Для однородной консольной пластины $1m$ -модель более точна, чем 3 -модель при небольшом числе степеней свободы ($l \sim 12-18$). В случае

неоднородной системы модифицированная модель имеет точность не хуже, чем β -модель, даже если число степеней свободы у нее значительно меньше.

Модифицированная модель позволяет рассчитывать колебания неоднородных систем со значительно меньшими затратами машинного времени без ухудшения точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zenkiewicz O. C. The finite element method in structural and continuum mechanics. Mc—Graw—Hill, 1967.
2. Lindberg G. M., Olson M. D. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2, № 1, 1970.
3. Mason V. J. Sound and Vibration, 7, No. 13, 1968.
4. Карсон В. Ж., Ньютон Р. Е. «Ракетная техника и космонавтика», 7, № 3, 1969.
5. Дикинсон С. М., Хеншелл Р. Д. «Ракетная техника и космонавтика», 7, № 3, 1969.
6. Anderson R. G., Irons B. M., Zienkiewicz O. C. Intern. J. Sol. and Struct., 4, No. 10, 1968.
7. Кандидов В. П. Сб. «Применение электронных вычислительных машин в строительной механике». «Наукова думка», 1968.
8. Огибалов П. М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. Изд-во МГУ, 1958.
9. Кандидов В. П. Сб. «Математическое моделирование и теория электрических цепей», вып. III. «Наукова думка», 1965.
10. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. «Наукова думка», 1964.
11. Dawe D. J. J. Mechan. Engineering Sci., 7, No. 1, 1965.
12. Dawe D. J. J. Mechan. Engineering Sci., 8, No. 1, 1966.
13. Буньков В. Г. Труды ЦАГИ, выпуск 977, 1965.

Поступила в редакцию
25.1 1971 г.

Кафедра
общей физики для мехмата