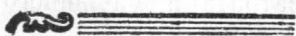


# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



№ 1 — 1972



УДК 534.322.3

Р. Э. ШИХЛИНСКАЯ

## О НЕЛИНЕЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ СПЕКТРА НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Методом Фурье-анализа римановского решения рассматривается задача о трансформации немонахроматической волны со сплошным спектром при распространении ее в нелинейной недиссипативной среде. Поле скоростей задается непериодической функцией, соответствующей нормальному распределению. Задача решается во втором приближении. Показано, что нелинейный эффект оказывает существенное влияние на формирование высокочастотной области спектра источников мощного шума даже при сферической расходимости.

Задачи, относящиеся к распространению монохроматических волн в нелинейной среде, рассматривались достаточно подробно. Менее изучены немонахроматические волны, хотя интенсивные сигналы и шумы часто бывают немонахроматическими (например, шумы струй, кавитационных областей). Теоретически было показано [1], что при распространении плоской волны с дискретным спектром в идеальной среде нелинейность приводит к «перемешиванию» спектра внутри исходной полосы частот и «расширению» его как в область высоких, так и в область низких частот вследствие появления комбинационных частот и гармоник высшего порядка. Нелинейные искажения пропорциональны ширине исходного спектра и, следовательно, больше, чем в случае монохроматической волны. Эффект «расширения» спектра теоретически был получен и для случая плоской волны, задаваемой непериодической функцией, при распространении этой волны в диссипативной среде [2]. Случайные акустические поля в нелинейных средах рассмотрены в работах [3 и 4]. В этих работах поле скоростей волны конечной амплитуды задавалось в виде стационарной случайной функции, статистические характеристики которой считались известными. Были определены функция корреляции и энергетический спектр на некотором расстоянии от источника стационарного шума. В этих работах рассматривались случаи идеальной среды и среды с диссипацией.

В отличие от [1], где рассматривался дискретный спектр, в данной работе методом Фурье-анализа римановского решения рассматривается задача о трансформации немонахроматической волны со сплошным спектром при распространении ее в нелинейной недиссипативной среде. Поле скоростей задается непериодической функцией, соответствующей нормальному (гауссову) распределению; спектр такого импульса яв-

ляется нормальным [5]. Полученные при анализе результаты можно применить и к источнику «шумового сигнала». Понятие «шумового сигнала» интерпретируется в соответствии с [5] следующим образом: шум можно рассматривать как беспорядочное повторение импульсов произвольной формы. Такая последовательность импульсов имеет осредненный спектр, совпадающий (с точностью до постоянного множителя) со спектром одиночного импульса.

### Плоская волна

Зададим форму волны непериодической функцией, соответствующей нормальному (гауссову) распределению:

$$v(x, t) = v_0 \exp \left[ -v_0^2 \left( t - \frac{x}{u} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где  $v$  — колебательная скорость;  $v_0$  — параметр, имеющий размерность частоты и характеризующий ширину исходного спектра;  $t$ ,  $x$  — временная и пространственная координаты;  $u$  — скорость перемещения точек профиля волны. Примем за начальную точку  $x=0$ . Тогда в начальной точке распределение скорости и соответственно интенсивности  $I$  будет задаваться функциями

$$v(0, t) = v_0 \exp(-v_0^2 t^2), \quad (2)$$

$$I(0, t) = v^2(0, t) \rho_0 c_0 = I_0 \exp(-2v_0^2 t^2), \quad (3)$$

где  $\rho_0$ ,  $c_0$  — плотность и скорость волны в невозмущенной среде. Спектр непериодической функции (3) в начальной точке  $x=0$  выразится через Фурье-преобразование

$$P_0(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(0, t) \exp(-jvt) dt = I_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{v_0} \exp\left(-\frac{v^2}{8v_0^2}\right), \quad (4)$$

$P_0(v)$  назовем энергетическим спектром, учитывая, что эта функция имеет смысл спектральной плотности интенсивности;  $v$  — текущая частота.

Для нахождения деформации волны скоростей  $v(x, t)$  применим метод Римана, ограничиваясь вторым приближением [6]. Полагая  $u = c_0 + \frac{\gamma+1}{2}v$  (где  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей), разложим функцию (1) по малому параметру  $\frac{v}{c_0}$ , удовлетворяющему условию

$$\frac{v}{c_0} \ll 0,1. \quad (5)$$

В результате преобразований, пренебрегая членами, содержащими  $\left(\frac{v}{c_0}\right)^2$ , получим

$$v(x, t) = v_0 \left\{ \exp \left[ -v_0^2 \left( t - \frac{x}{c_0} \right)^2 \right] \right\} \left\{ 1 - v_0^2 \left( t - \frac{x}{c_0} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{(\gamma+1)}{2} \frac{v_0}{c_0} \left( \frac{x}{c_0} \right) \exp \left[ -v_0^2 \left( t - \frac{x}{c_0} \right)^2 \right] \right\}. \quad (6)$$

Из (6) видно, что «крутизна фронта» волны растет с расстоянием, причем тем быстрее, чем больше число Маха  $M = \frac{v_0}{c_0}$  и чем шире исходный спектр ( $v_0$ ). В точке  $x=0$  формула (6) дает исходную форму волны. Заметим, что в формуле (6) второе слагаемое существенно меньше единицы, т. е. формула (6) описывает малую деформацию профиля волны.

В процессе вывода формулы (6) получается условие

$$x \leq \frac{\sqrt{2}}{5} \frac{c_0}{v_0(\gamma + 1)M}, \quad (7)$$

которое определяет расстояния, на которых справедлива формула (6). Из условия (7) следует, что при увеличении числа Маха  $M$  и увеличении ширины спектра  $v_0$  деформация профиля возникает на более близких расстояниях.

Найдем трансформацию энергетического спектра. В произвольной точке  $x$  интенсивность шума будет определяться функцией

$$I(x, t) = I_0 \exp \left\{ -2v_0^2 \left( t - \frac{x}{c_0} \right)^2 \right\} \times \\ \times \left\{ 1 - v_0^2 \left( t - \frac{x}{c_0} \right) (\gamma + 1) \frac{v_0}{c_0} \left( \frac{x}{c_0} \right) \exp \left[ -v_0^2 \left( t - \frac{x}{c_0} \right)^2 \right] \right\}, \quad (8)$$

где  $I_0 = \rho_0 c_0 v_0^2$ . Применяя Фурье-преобразование к функции  $I(x, t)$ , определим спектр  $P(v)$  на расстоянии  $x$ :

$$P(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, t) \exp(-jvt) dt.$$

Рассчитав этот интеграл, получим комплексную функцию вида

$$I_0 \left[ \exp \left( -jv \frac{x}{c_0} \right) \right] \left[ \exp \left( -\frac{v^2}{8v_0^2} \right) \right] \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{v_0} + \\ + jI_0 z \frac{\sqrt{\pi} v}{12 \sqrt{3} v_0^3} \left[ \exp \left( -jv \frac{x}{c_0} \right) \right] \left[ \exp \left( -\frac{v^2}{12v_0^2} \right) \right],$$

где

$$z = \frac{x}{c_0} v_0^2 (\gamma + 1) \frac{v_0}{c_0}.$$

Модуль этой комплексной функции характеризует амплитудный спектр интенсивности или просто спектр  $P(v)$  на расстоянии  $x$ :

$$P(v) = I_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{v_0} \left[ \exp \left( -\frac{v^2}{8v_0^2} \right) \right] \times \\ \times \sqrt{1 + \left( \frac{x}{c_0} \right)^2 \left( \frac{v_0}{c_0} \right)^2 \frac{(\gamma + 1)^2}{215} v^2 \exp \left( -\frac{v^2}{12v_0^2} \right)}. \quad (9)$$

При  $x=0$  формула (9) дает исходную форму спектра (4). Из (9) следует, что «крылья» спектра симметрично поднимаются относительно

<sup>1</sup> Для волны со сложным спектром будем определять число Маха как отношение абсолютного максимума  $|v| = v_0$  за период к  $c_0$ .

«пиковой» частоты (т. е. частоты, соответствующей максимальному значению спектральной плотности). Величина «подъема» существенно растет с частотой  $\nu$ . Применительно к источнику «шумового сигнала» можно ожидать, что шум, «нормальный» вблизи источника, будет стремиться превратиться вдали от источника в «белый» шум.

Важно отметить, что второе слагаемое в подкоренном выражении формулы (9) может быть значительно больше 1, при соблюдении условий (5) и (7).

### Расходящаяся сферическая волна

На расстоянии  $r_0$  от источника зададим форму волны непериодической функцией, соответствующей нормальному распределению:

$$v(r_0, t) = v_0 \exp[-(kr_0 - tv_0)^2], \quad (10)$$

$$I(r_0, t) = I_0 \exp[-2(kr_0 - tv_0)^2], \quad (11)$$

где  $v(r_0, t)$  — акустическая скорость;  $I(r_0, t)$  — интенсивность, причем  $I_0 = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 v_0^2$ ;  $k = \frac{\nu_0}{c_0}$  — волновое число. Соответственно энергетический спектр на расстоянии  $r_0$  является нормальным:

$$P_0(\nu) = P_{0\max} \exp\left(-\frac{\nu^2}{8\nu_0^2}\right), \quad (12)$$

где

$$P_{0\max} = I_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\nu_0}.$$

Для сферической волны решение Римана дает

$$u = c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v(r) = c_0 + \frac{\gamma+1}{2} \frac{v(r_0)}{r} r_0,$$

где  $c_0$  — обычная скорость звука, соответствующая перемещению волны без изменения формы профиля; второй член приводит к искажению профиля. Тогда величина дополнительного смещения точек профиля волны в течение времени  $t = \frac{r-r_0}{c_0} = \frac{\delta r}{c_0}$  равна

$$\delta r = \int_{r_0}^r \frac{\gamma+1}{2} \frac{v(r_0)}{r} r_0 \frac{dr}{c_0} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \frac{v(r_0)}{c_0} r_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (13)$$

На произвольном расстоянии  $r > r_0$ , учитывая сферическую расходимость, зададим профиль волны скоростей в виде

$$\frac{r}{r_0} v(r, t) = v_0 \exp[-(kr - v_0 t)^2]. \quad (14)$$

Чтобы учесть изменение профиля волны за счет нелинейного взаимодействия, в правой части выражения (14) к  $r$  прибавим  $\delta r$  и разложим по степеням малого параметра  $\delta r$ , учитывая только второе приближение (условие малости параметра  $\delta r$  эквивалентно условию  $\frac{v_0}{c_0} \ll 1$ ). После преобразований, пренебрегая членами, содержащими  $(\delta r)^2$ , получим с учетом (13):

$$\frac{rv(r, t)}{r_0} = v_0 \exp[-(kr - v_0 t)^2] - v_0^2 k (v_0 t - kr) (\gamma + 1) \times \\ \times \frac{r_0}{c_0} \left( \ln \frac{r}{r_0} \right) \exp[-2(kr - v_0 t)^2]. \quad (15)$$

Формула (15) дает изменение профиля волны с учетом сферической расходимости и нелинейного взаимодействия, причем второе слагаемое на порядок меньше первого, т. е. искажение профиля вследствие нелинейного взаимодействия мало.

Формула (15) справедлива для расстояний  $r$ , определяемых условием

$$\ln \frac{r}{r_0} \leq \frac{\sqrt{2} c_0}{i^5 (\gamma + 1) r_0 v_0 M}. \quad (16)$$

Условие (16) по физическому смыслу аналогично условию (7) для плоской волны. Как видно из сравнения условий (16) и (7), в сферической волне при прочих равных условиях нелинейные искажения нарастают медленнее.

Для нахождения энергетического спектра на расстоянии  $r$  от источника, применим Фурье-преобразование к функции  $I(r, t) = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 v^2(r, t)$  — интенсивности волны на расстоянии  $r$  от источника. После преобразований, пренебрегая членами, содержащими  $\left(\frac{v}{c_0}\right)^2$ , получим комплексную функцию, модуль которой определяет амплитудный спектр интенсивности (или просто спектр интенсивности) и имеет вид

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 P(v) = P_0(v) \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2 \left(\frac{r_0 \ln \frac{r}{r_0}}{c_0}\right)^2 \frac{(\gamma + 1)^2}{54} v^2 \exp\left(\frac{v^2}{12v_0^2}\right)}, \quad (17)$$

где  $P_0(v) = I_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{v_0} \exp\left(-\frac{v^2}{8v_0^2}\right)$  и  $P(v)$  — спектральная плотность интенсивности на расстоянии  $r$  от источника. При  $r=r_0$  выражение (17) переходит в выражение (12), дающее исходный энергетический спектр. Существенно, что второе слагаемое в подкоренном выражении может быть  $\gg 1$ , при выполнении условия  $\left(\frac{v_0}{c_0}\right) \ll 1$  и условия (16). Если в выражении (17) отвлечься от сферической расходимости  $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2$ , то характер изменения спектра оказывается таким же, как в случае плоской волны, за исключением зависимости от расстояния: для сферической волны нелинейные искажения нарастают с расстоянием гораздо медленнее  $\left(\sim \ln \frac{r}{r_0}\right)$ . Если учесть множитель  $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2$ , то окажется, что для сферической волны нелинейный эффект будет заметен на значительно более высоких частотах, чем для плоской волны, при прочих равных условиях.

Приведем некоторые численные оценки для случая сферической волны, рассматривая источник нормального «шумового сигнала». Для



задания исходных параметров (интенсивности шума, «пиковой» частоты, ширины спектра) воспользуемся осредненными данными по интенсивности и спектру шума реактивных двигателей, ракет и моделей струй [7], а также данными о шуме в окрестностях аэропорта при взлете и посадке самолетов с ТРД [8], [9]. При эффективном диаметре источника порядка 60 м примем  $r_0 = 6$  м. На этом расстоянии зададимся следующими исходными параметрами нормального «шумового сигнала»: максимальная спектральная плотность интенсивности  $P_{0\max} = 10^{-3}$  вт·см<sup>-2</sup>гц<sup>-1</sup> (что соответствует 130 дб над порогом слышимости); «пиковая» частота  $f_{\text{пик}} = 125$  гц; «ширина» спектра  $\nu_0 = 1.4 \cdot 10^3$  гц; соответственно максимальное число Маха<sup>1</sup>.

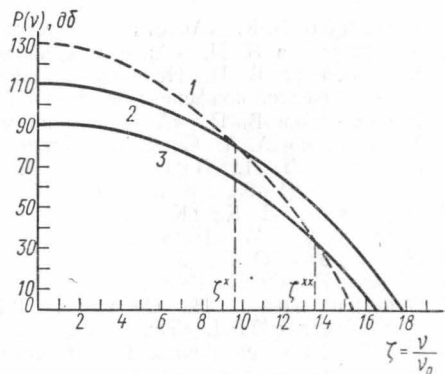
$$M = \frac{v_0}{c_0} = \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{P_{0\max} \nu_0}{\frac{\pi}{2} \rho_0 c_0}} = 1.5 \cdot 10^{-2},$$

что удовлетворяет условию (5).

Для построения кривых распределения спектральной плотности интенсивности на различных расстояниях от источника воспользуемся формулами (12) и (17), в которых полагаем  $\nu = f - f_{\text{пик}}$ , где  $f$  — значения рабочих частот, приводимых в экспериментальных спектрах шума струи<sup>2</sup>. Для удобства введем безразмерную частоту  $\zeta = \frac{\nu}{\nu_0}$ .

На рисунке форма исходного спектра на расстоянии  $r_0 = 6$  м от источника представлена кривой 1. Форма спектра на расстояниях

$r_1 = 60$  м и  $r_2 = 600$  м с учетом нелинейного эффекта и сферической расходимости представлена кривыми 2 и 3. Из сравнения этих кривых видно, что на частоте  $\zeta^* = 9.6$  (см. рис.) нелинейный рост спектральной плотности интенсивности как раз компенсирует спад интенсивности вследствие сферической расходимости. Для частот  $\zeta > \zeta^*$ , несмотря на сферическую расходимость, должен наблюдаться рост интенсивности по сравнению с исходной (например, для  $\zeta = 15$  превышение составляет 25 дб). Заметим, что значения  $\zeta \geq \zeta^*$  соответствуют в рассматриваемом случае частотам  $f \geq 13.4$  кгц, т. е. высокочастотной области спектра ( $f \gg f_{\text{пик}}$ ). Если при прочих равных условиях взять более широкий спектр (увеличить  $\nu_0$ ), то на той же безразмерной частоте  $\zeta$  эффект возрастет (за счет множителей  $\nu^2$  и  $(\frac{v_0}{c_0})^2$  в подкоренном выражении формулы (17)). Соответственно компенсация будет наступать на более низкой безразмерной частоте.



Кривые 1, 2, 3 показывают распределение спектральной плотности интенсивности  $P(\nu)$  на расстояниях от источника  $r_0 = 6$  м,  $r_1 = 60$  м и  $r_2 = 600$  м. Значения  $P(\nu)$  даны в децибеллах относительно порога слышимости  $10^{-16}$  вт·см<sup>-2</sup>

<sup>1</sup> Здесь принято  $\rho_0 = 1.3 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>,  $c_0 = 3.4 \cdot 10^4$  см/сек.  
<sup>2</sup> Заметим, что смещение исходного спектра  $P_0(\nu)$  по оси частот на величину  $\Omega$  (в данном случае  $\Omega = f_{\text{пик}}$ ) соответствует умножению функции  $I(r_0 t)$  на  $\cos \Omega t$  [5]. Эта операция не влияет на величину искажения профиля волны, и формулы (12) и (17) остаются верными. В данном случае это тем более справедливо, что сдвиг спектра очень мал ( $f_{\text{пик}} \ll \nu_0$ ).

Из сравнения кривых 2 и 3 видно, что на больших расстояниях от источника нелинейный эффект слабее влияет на форму спектра. Так, при  $r=r_2=600$  м компенсация наступает на более высокой частоте, чем при  $r=r_1=60$  м ( $\zeta^{**}=13,5$ , что соответствует  $f=18$  кгц), и форма спектра в высокочастотной области меньше искажается, чем в случае  $r_1=60$  м. Это объясняется медленным ростом величины нелинейного эффекта с расстоянием ( $\sim \ln \frac{r}{r_0}$ ) по сравнению со спадом интенсивности вследствие сферической расходимости ( $\sim \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$ ).

В приведенных численных оценках не учитывалось падение интенсивности с расстоянием вследствие поглощения за счет вязкости. Этот эффект для рассматриваемой области частот ( $f < 25$  кгц) незначителен до расстояний порядка 100 м. Для больших расстояний этот эффект должен быть учтен (например, при  $r=600$  м для  $\zeta=15$  интенсивность падает на 16 дБ), поэтому влияние нелинейного эффекта на форму спектра в высокочастотной области становится еще менее заметным. Приведенные численные оценки показывают, что нелинейный эффект оказывает существенное влияние на формирование высокочастотной области спектра источников мощного шума, даже при сферической расходимости.

Автор выражает благодарность за ценные дискуссии В. А. Красильникову и Л. К. Зарембо.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зарембо Л. К. «Акустический журнал», 7, вып. 2, 189—194, 1961.
2. Максимов Б. И. «Акустический журнал», 15, вып. 3, 462, 1969.
3. Кузнецов В. П. Нелинейное распространение шумов. «Труды VI Всесоюзной акустической конференции». Б IV4. М., 1968.
4. Кузнецов В. П. «Акустический журнал», 15, вып. 4, 554, 1969.
5. Харкевич А. А. Спектры и анализ, гл. 1, § 4, 9 и 10. М., Гостехиздат, 1962.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, гл. X, § 94—95, стр. 461—464, 1954.
7. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику, гл. 10, § 7. М., «Наука», 1966.
8. Лебедева О. В., Муниин А. Г. «Труды VI Всесоюзной акустической конференции». ЖОВ2, М., 1968.
9. Мельников Б. Н., Окороков В. С. О расчете шума на земле при посадке самолета с ТРД. «Труды VI Всесоюзной акустической конференции». ЖОВ4, М., 1968. Шум, создаваемый в окрестностях аэропорта при эксплуатации пассажирского самолета АН-24.

Поступила в редакцию  
15.12 1970 г.

Кафедра  
общей физики для физфака