Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1972

УДК 539.12.01

Б. В. ХОЛОМАЙ, В. Ч. ЖУКОВСКИЙ

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ФОКУСИРУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ

С помощью волновых функций электрона, подчиняющихся уравнению Дирака в аксиально-симметричном магнитном поле слабофокусирующего типа, вычислена мощность излучения электрона с учетом его спиновых состояний.

Излучение электрона в неоднородном, аксиально-симметричном магнитном поле слабофокусирующего типа рассматривалось в ряде работ [1, 2, 3, 4] лишь на основе скалярного уравнения Клейна—Гордона. В настоящей работе мощность излучения электрона в поле указанного типа будет определена с помощью найденных ранее [5] решений уравнения Дирака. Будет выяснено также влияние неоднородности фокусирующего поля на поведение спина электрона при синхротронном излучении.

Движение электрона мы будем описывать уравнением Дирака

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \{c(\vec{\alpha}\vec{P}) + \rho_3 m_0 c^2\} \Psi, \tag{1}$$

где $\vec{\alpha}$ и ρ_3 — матрицы Дирака в обычной форме записи, а оператор кинетического импульса $\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e_0}{c}\vec{A}$ связан с вектор-потенциалом $\vec{A}$ внешнего магнитного поля.

Фокусирующее магнитное поле зададим таким образом, чтобы вблизи плоскости равновесной орбиты ($z=0$) оно имело следующий вид:

$$H_r = H_\varphi = 0, \quad H_z = br^{-q}, \tag{2}$$

где показатель спадения магнитного поля q лежит в пределах $0<q<1$ (мягкая фокусировка), а $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Вектор-потенциал $\vec{A}$, удовлетворяющий условию (2), уравнениям Максвелла и требованиям калибровки, можно выбрать в следующем виде ([4]):

$$A_\varphi = \frac{br^{1-q}}{2-q}\left[1 + \frac{q(2-q)}{2}\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \dots\right], \quad A_z = A_r = 0, \tag{3}$$

где в гармоническом приближении членами $\left(\frac{z}{r}\right)^4$ пренебрегаем и т. д.

К сожалению, найти точное решение уравнений Дирака для потенциала (3) не представляется возможным, поэтому мы воспользуемся найденными нами волновыми функциями [5] в приближении гармонических колебаний, учитывающем малость отклонений координат электрона от равновесной орбиты $x = r - R_0$ и z:

$$\frac{|x|}{R_0} \ll 1, \quad \frac{|z|}{R_0} \ll 1.$$

Здесь R_0 — радиус равновесной орбиты

$$R_0 = \left[\frac{l - \frac{1}{2}}{\gamma(1-q)}\right]^{\frac{1}{2-q}}, \tag{4}$$

где $l = 0, 1, 2 \dots$ — азимутальное квантовое число.

В этом приближении волновые функции электрона, удовлетворяющие уравнению Дирака (1) с потенциалами (3), с точностью до членов $\sim 0(l^{-3/2})$ имеют вид:

$$\Psi = \frac{\sqrt[4]{\lambda_1 \lambda}}{2\sqrt{2\pi r}} e^{-icKt} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} \sqrt{1 + \frac{k_0}{K}}\, U_s\left(\rho + \frac{a}{2}\right)\left[AU_k\left[\xi - \frac{b}{2}\right) + BU_k\left(\xi + \frac{b}{2}\right)\right] e^{i(l-1)\varphi} \\ \sqrt{1 + \frac{k_0}{K}}\, U_s\left(\rho + \frac{a}{2}\right)\left[AU_k\left(\xi - \frac{b}{2}\right) - BU_k\left(\xi + \frac{b}{2}\right)\right] e^{il\varphi} \\ i\sqrt{1 - \frac{k_0}{K}}\, U_s\left(\rho + \frac{a}{2}\right)\left[BU_k\left(\xi - \frac{b}{2}\right) - AU_k\left(\xi + \frac{b}{2}\right)\right] e^{i(l-1)\varphi} \\ i\sqrt{1 - \frac{k_0}{K}}\, U_s\left(\rho - \frac{a}{2}\right)\left[BU_k\left(\xi - \frac{b}{2}\right) + AU_k\left(\xi + \frac{b}{2}\right)\right] e^{il\varphi} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Введены следующие безразмерные переменные:

$$\rho = \sqrt{\lambda}\, x, \quad \xi = \sqrt{\lambda} z,$$

где

$$\lambda = \sqrt{1-q}\,(2-q)\gamma R_0^{-q}, \quad \lambda_1 = \sqrt{q}\,(2-q)\gamma R_0^{-q}.$$

Константы a и b соответственно равны.

$$a = (1-q)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1-q}{2-q}}\, \frac{1}{\sqrt{l - \frac{1}{2}}}, \quad b = q^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1-q}{2-q}}\, \frac{1}{\sqrt{l - \frac{1}{2}}},$$

а $E = c\hbar K$ — полная энергия электрона, равная

$$E = c\hbar \left\{ \left[\frac{\left(l - \frac{1}{2}\right)(2-q)}{R_0(1-q)} \right]^2 \left[1 + a^2(2s+1) + b^2(2k+1)\right] + k_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ e_0^2 H^2(R_0) R_0^2 + e_0 H(R_0) c\hbar \sqrt{1-q}\,(2s+1) + \right.$$

$$\left. + e_0 H(R_0) c\hbar \sqrt{q}\,(2k+1) + m_0^2 c^4 \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (6)$$

Квантовые числа s и k характеризуют квадратичные флуктуации координат относительно их равновесных значений:

$$\langle x^2 \rangle = \langle (r - R_0)^2 \rangle = \frac{c\hbar\left(s + \frac{1}{2}\right)}{e_0 H(R_0)\sqrt{1-q}}, \quad \langle z^2 \rangle = \frac{c\hbar\left(k + \frac{1}{2}\right)}{e_0 H(R_0)\sqrt{q}}.$$

Постоянные A и B определяют спиновые состояния электрона и удовлетворяют условию $|A|^2 + |B|^2 = 1$.

Волновые функции (5) позволяют исследовать движение поляризованных электронов в неоднородном магнитном поле, включая поведение спина при синхротронном излучении.

Мощность излучения определяется следующим выражением:

$$W_i = \frac{ce_0^2}{2\pi} \int d^3\varkappa\,\delta(\varkappa - K + K')\,F_i.$$

где

$$F_\sigma = \overline{\alpha}_1^* \overline{\alpha}_1, \qquad (7)$$

$$F_\pi = \overline{\alpha}_2^* \overline{\alpha}_2 \cos^2\theta + \overline{\alpha}_3^* \overline{\alpha}_3 \sin^2\theta\,(\overline{\alpha}_2^* \overline{\alpha}_3 + \overline{\alpha}_3^* \overline{\alpha}_2)\sin\theta\cos\theta.$$

В этих выражениях символами σ и π обозначены компоненты линейной поляризации синхротронного излучения [4], $\vec{\overline{\alpha}}$ — матричные элементы матриц Дирака:

$$\vec{\overline{\alpha}} = \int \Psi_a^+ e^{-i\vec{\varkappa}\vec{r}} \vec{\alpha} \Psi_b\, d^3x. \qquad (8)$$

При их вычислении мы встречаемся с интегралами типа:

$$L_0 = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\varkappa r \sin\theta \sin\varphi + i(l-l')\varphi} \times$$

$$\times U_s\left[\sqrt{\lambda}\,(r - R_0) + \frac{a}{2}\right] U_{s'}\left[\sqrt{\lambda'}\,(r - R_0') - \frac{a'}{2}\right]. \qquad (9)$$

Вводя новую переменную

$$t = \sqrt{\lambda}\,(r - \Delta), \quad \Delta = \frac{\sqrt{\lambda}\,R_0 + \sqrt{\lambda'}\,R_0'}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda'}} \simeq \frac{R_0 + R_0'}{2} \simeq R_0\left(1 - \frac{\nu}{2(2-q)\,l}\right)$$

и учитывая изменение величин, обозначенных штрихами, при переходе из состояния l, s, k в состояние $l' = l - \nu$, s', k'

$$\rho = t - b_0, \quad \rho' = \frac{\sqrt{\lambda'}}{\sqrt{\lambda}}\,t + b_0 \simeq t + b_0,$$

где

$$b_0 = \frac{\sqrt{\lambda\lambda'}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda'}} (R_0 - R_0') \simeq \frac{\nu}{2\sqrt[4]{1-q}\,\sqrt{2-q}\,\sqrt{l}},$$

преобразуем интеграл (9):

$$L_0 = \int\limits_{-\sqrt{\lambda}\,\Delta}^{\infty} dt \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-i\varkappa\sin\theta\sin\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \frac{R_0 + R_0'}{2}\right)} U_s(t + b_0)\, U_{s'}(t - b_0). \qquad (10)$$

Учитывая далее малость колебаний, нижний предел интегрирования в (10) можно распространить до бесконечности. Тогда, интегрируя сначала по t, потом по φ, получим окончательное выражение для интеграла (8):

$$L_0 = J_\nu(q_0)\, I_{ss'}(q_1 + 2b_0 a),$$

где $I_\nu(q_0)$, $I_{ss'}(q_1)$ — соответственно функции Бесселя и функции Лагерра (см., например, [4]), а

$$q_0 = \frac{\varkappa(R_0 + R_0')}{2}\sin\theta - \frac{\varkappa\sin\theta\,(s - s')}{2b_0\sqrt{\lambda}}, \qquad q_1 = 2b_0^2,$$

при этом мы пренебрегли релятивистскими поправками $\sin^2\varphi \sim 1 - \beta^2$ по сравнению с единицей и воспользовались следующим известным интегралом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t}\, U_{n'}(t + b)\, U_n(t + a)\, dt = e^{-\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right)} \left(\frac{a - b + \alpha}{a - b - \alpha}\right)^{\frac{n'-n}{2}} \times$$

$$\times I_{nn'}\left[\frac{(a-b)^2 - \alpha^2}{2}\right].$$

Аналогично производится интегрирование по координате z:

$$L_1 = \sqrt{\lambda_1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varkappa z\cos\theta}\, U_k\left(\xi \mp \frac{b}{2}\right) U_{k'}\left(\xi' \mp \frac{b'}{2}\right) dz \simeq$$

$$\simeq \left[1 - \frac{i\varkappa b\cos\theta}{2\sqrt{\lambda_1}}\right] I_{kk'}(q_2),$$

$$L_2 = \sqrt{\lambda_1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varkappa z\cos\theta}\, U_k\left(\xi \mp \frac{b}{2}\right) U_{k'}\left(\xi' \pm \frac{b'}{2}\right) dz = I_{kk'}\left(q_2 + \frac{b^2}{2}\right) dz,$$

где

$$q_2 = \frac{\varkappa^2\cos^2\theta}{2\lambda_1}.$$

Тогда для матричных элементов матриц Дирака (8) получим следующие выражения с точностью до $0\left(\frac{\nu}{l}\right)^{3/2}\left(\xi y = \frac{1-q}{2-q}\,\frac{\nu}{l}\right)$:

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{i}{2} I_{ss'}(q_1)\, I_{kk'}(q_2)\, \{\xi y\, J_\nu(q_0)\, [i\cos\theta\,(AB' - BA') +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon_0}\,(AB' + A'B)] - 2(AA' + BB')\, J_\nu'(q_0)\},$$

$$\overline{\alpha}_2 = -\frac{1}{2} I_{ss'}(q_1) I_{kk'}(q_2) \{\xi y J'_\nu(q_0) [\sqrt{\varepsilon_0} (A'B + B'A) +$$

$$+ i \cos\theta (AB' - BA')] - 2 (AA' + BB') J'_\nu(q_0)\}, \qquad (11)$$

$$\overline{\alpha}_3 = -\frac{i}{2} I_{ss'}(q_1) I_{kk'}(q_2) \xi y \{\sqrt{\varepsilon_0} (AA' - BB') J_\nu(q_0) +$$

$$+ (A'B - AB') J'_\nu(q_0)\}.$$

Здесь введены следующие обозначения (ср. [4]):

$$\varkappa = \frac{\xi y K}{1 + \frac{\xi y}{\alpha}} \approx \xi y K, \quad \alpha = 1 - \sqrt{\frac{q}{2-q}}, \quad \xi = \frac{3\gamma R_0^{-q}(2-q)}{K^2 \varepsilon_0^{3/2} 2} = \left(\frac{E}{E_{1/2}}\right)^2,$$

$$y = \frac{K\varkappa\varepsilon_0}{3\gamma\left(1 - \frac{\varkappa}{\alpha K}\right) R_0^{-q}} \frac{2}{2-q} \simeq \frac{2}{3} \nu\varepsilon_0^{3/2},$$

$$E_{1/2} = m_0 c^2 \left(\frac{2}{3} \frac{m_0 c R_0}{\hbar}\right)^{1/2}.$$

Рассматривая в дальнейшем ультрарелятивистское приближение $\varepsilon_0 = 1 - \beta^2 \ll 1$, $\varepsilon = 1 - \beta^2 \sin^2\theta \ll 1$, воспользуемся асимптотикой функций Бесселя с помощью функций Макдональда [4,7]:

$$J_\nu(q_0) \simeq \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \left(1 - \frac{q_0^2}{\nu^2}\right)^{1/2} K_{1/3}\left[\frac{\nu}{3}\left(1 - \frac{q_0^2}{\nu^2}\right)^{3/2}\right],$$

$$J'_\nu(q_0) \simeq \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \left(1 - \frac{q_0^2}{\nu^2}\right) K_{2/3}\left[\frac{\nu}{3}\left(1 - \frac{q_0^2}{\nu^2}\right)^{3/2}\right]. \qquad (12)$$

Возводя матричные элементы (11) в квадрат и проводя суммирование по квантовым числам s'; k', учитывая при этом, что в силу закона сохранения $\varkappa = K - K'$ величина $\varkappa$ зависит от s' и k', получим следующие выражения для квадратов матричных элементов:

$$|\overline{\alpha_1}|^2 = N^2 \varepsilon | \xi y K_{1/3}(z_0) [i \cos\theta (AB' - BA') + \sqrt{\varepsilon_0} (AB' + A'B)] -$$

$$- 2\sqrt{\varepsilon(1 + \xi y)} (AA' + BB') K_{2/3}|^2,$$

$$|\overline{\alpha}_2|^2 = N^2 \varepsilon (AA' + BB')^2 K_{1/3}^2(z_0), \qquad (13)$$

$$|\overline{\alpha}_3|^2 = N^2 (\xi y)^2 [\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} (AA' - BB') K_{1/3}(z_0) + \varepsilon (A'B - AB') K_{2/3}(z_0)]^2,$$

где

$$z_0 = \frac{1}{2} y \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{3/2}, \quad N = \frac{(1 + \xi y)^{1/2}}{2\pi\sqrt{3}}.$$

Для конкретизации произвольных спиновых коэффициентов A и B рассмотрим два конкретных случая излучения электронов с «продольной» и «поперечной» поляризацией спина.

Излучение продольно поляризованных электронов. Для определения спиновых коэффициентов A и B в случае продольно поляризованных электронов потребуем, чтобы волновые функции (5) были собственными функциями сохраняющегося спинового оператора [4]

$$(\vec{\sigma}\vec{P})\Psi = \hbar k\zeta\Psi, \quad k = \sqrt{K^2 - k_0^2}\,. \tag{14}$$

Подставляя волновые функции (5) в условие (14), найдем

$$A = i\zeta B, \quad |A| = |B| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

где $\zeta = \pm 1$ характеризует две возможные ориентации спина электрона по отношению к направлению его движения.

В этом случае матричные элементы (13) приобретают вид

$$|\bar{\alpha}_1|^2 = N^2 \left\{ \frac{1+\zeta\zeta'}{2} [(2+\xi y)\varepsilon K_{2/3} + \zeta\xi y \cos\theta \sqrt{\varepsilon}\, K_{1/3}]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\xi\xi'}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \xi^2 y^2 K_{1/3}^2 \right\},$$

$$|\bar{\alpha}_3 | \sin\theta - \langle\alpha_2\rangle \cos\theta|^2 = N^2 \left\{ \frac{1+\zeta\zeta'}{2} [\xi\xi y \varepsilon K_{2/3} + (2+\xi y)\cos\theta \sqrt{\varepsilon}\, K_{1/3}]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\zeta\zeta'}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \xi^2 y^2 K_{1/3}^2 \right\}.$$

Для интегральной вероятности с учетом «продольной» поляризации получим следующее выражение, совпадающее с соответствующим результатом в однородном магнитном поле [4, 5]:

$$w = \frac{5\sqrt{3}}{6} \frac{c_0^2}{c\hbar} \frac{c}{R_0} \frac{E}{m_0 c^2} \left[\frac{1+\zeta\zeta'}{2} + \frac{7}{54} \frac{1-\zeta\zeta'}{2} \right]. \tag{15}$$

Излучение фотонов электронами с «поперечной» поляризацией. Для рассматриваемого нами фокусирующего магнитного поля (2) не известен сохраняющийся спиновой оператор, проектирующий спин электрона на направление магнитного поля.

Однако мы можем характеризовать величину этой проекции спина средним значением оператора μ_3

$$\vec{\mu} = m_0 c\vec{\sigma} + \rho_2 [\vec{\sigma}\vec{P}],$$

который является интегралом движения в случае однородного магнитного поля.

С помощью волновых функций (5) находим среднее значение оператора проекции спина на направление оси симметрии поля (ось z)

$$\langle\mu_3\rangle = 2\hbar ABK \left\{ 1 - \frac{q}{2} \frac{\langle z^2\rangle}{R_0^2} \right\}. \tag{16}$$

При движении электрона в плоскости орбиты вращения (см. также [6]) коэффициенты A и B допускают простую интерпретацию. При $A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ спин электрона направлен вдоль оси симметрии поля. При $A = -B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ направление спина противоположно полю. Из формулы (16) видно, что в случае аксиальной фокусировки ($q \neq 0$) проекция спина на направление поля несколько меняется, однако изменение остается малым, пока амплитуда колебаний достаточно мала $\left(\frac{\langle z^2\rangle}{R_0^2} \ll 1\right)$.

В этом случае матричные элементы (13) приобретают вид:

$$|\bar{\alpha}_1|^2 = N^2\left\{\frac{1+\zeta\zeta'}{2}\left[(2+\xi y)\,\varepsilon K_{2/3} - \zeta\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\;\xi y K_{1/3}\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\zeta\zeta'}{2}\,\xi^2 y^2 \varepsilon \cos^2\theta K^2_{1/3}\right\},$$

$$|\bar{\alpha}_3 \,|\sin\theta - \langle\alpha_2\rangle\cos\theta\,|^2 = N^2\left\{\frac{1+\zeta\zeta'}{6}(2+\xi y)\cos^2\theta\varepsilon K^2_{1/3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\zeta\zeta'}{2}\,\xi^2 y^2\left(\varepsilon K_{2/3} + \zeta\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\;K_{1/3}\right)^2\right\}.$$

Для вероятности с учетом «поперечной» поляризации электронов найдем выражение:

$$w = \frac{5\sqrt{3}}{6}\,\frac{e_0^2}{\hbar R_0}\,\frac{E}{m_0c^2}\times$$
$$\times\left\{\frac{1+\zeta\zeta'}{2}\left[1 - \frac{16\sqrt{3}}{45}\xi + \frac{23}{6}\xi^2 - \frac{\zeta}{5}\left(1 - \frac{20\sqrt{3}}{9}\xi\right)\xi\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\zeta\zeta'}{2}\,\frac{1}{6}\,\xi^2\left(1 - \zeta\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)\right\}. \qquad (17)$$

Полученные нами формулы (15) и (17) для интегральных вероятностей излучения в слабофокусирующем магнитном поле с учетом спина электрона совпадают с соответствующими формулами в однородном магнитном поле $(q=0)$. Таким образом, в пренебрежении малыми добавками порядка $\frac{\langle x^2\rangle}{R_0^2}$ и $\frac{\langle z^2\rangle}{R_0^2}$ излучение электрона не зависит от фокусирующих свойств поля. Однако, имея в виду формулу (16), следует подчеркнуть, что устойчивость ориентации спина электрона на направление оси симметрии магнитного поля связана с малостью амплитуды аксиальных бетатронных колебаний $\frac{\langle z^2\rangle}{R_0^2}$.

Авторы благодарны А. А. Соколову и И. М. Тернову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Тернов И. М. ЖЭТФ, 28, 431, 1955.
2. Соколов А. А., Тернов И. М., Страховский Г. М. ЖЭТФ, **31**, 439, 1956.
3. Gutbord F. Zs. Phys., **168**, 177, 1962.
4. Синхронное излучение», сб. статей под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., «Наука», 1966.
5. Холомай Б. В., Тернов И. М., Соколов А. А., Жуковский В. Ч. «Теоретическая и математическая физика» (в печати).
6. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, **153**, 1053, 1963.
7. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. М., ГИТТЛ, 1951.

Поступила в редакцию
17.12 1970 г.

Кафедра
теоретической физики