

УДК 534.2.

В. А. КРАСИЛЬНИКОВ, В. И. ПАВЛОВ

**О НЕЛИНЕЙНОМ ЗАТУХАНИИ ПЛОСКИХ
МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ
ЖИДКОСТИ**

Содержится теория нелинейного затухания плоских волн на поверхности жидкости с точностью до второго приближения.

При распространении плоской монохроматической волны конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости, вследствие нелинейности уравнения движения происходит искажение ее формы и генерация гармоник, что должно привести к увеличению затухания таких волн по сравнению со значением коэффициента затухания для волн бесконечно малой амплитуды. Если бы поверхностные волны распространялись без дисперсии, то при достаточно больших числах Рейнольдса и сильно выраженной при этом нелинейности, коэффициент затухания за счет вязкости возрастал бы в большой степени, поскольку энергия из основной волны непрерывно перекачивалась бы в гармоники, как это имеет место, например, в случае интенсивных плоских акустических волн в жидкости, распространяющихся без дисперсии [1].

Однако сильная дисперсия для волн на поверхности жидкости существенно тормозит развитие нелинейных процессов. При наличии дисперсии амплитуда рождающейся второй гармоники волны (как и гармоник более высоких номеров) не нарастает непрерывно в пространстве, а испытывает пространственные биения, и основная волна обменивается (по мере распространения) своей энергией с этой гармоникой.

Для чисто капиллярных волн этот процесс можно наблюдать сравнительно несложными средствами [2]. В [3] в области капиллярных и капиллярно-гравитационных волн был измерен коэффициент затухания плоской монохроматической волны в воде и о-ксилоле. Этот коэффициент увеличивается при увеличении амплитуды волны, в особенности при переходе в ту часть спектра капиллярно-гравитационных волн, где скорости основной волны и волны удвоенной частоты близки друг другу.

Рассмотрим задачу о нелинейном затухании плоской поверхностной монохроматической волны. Для этого воспользуемся методом, который обычно применяется для решения задачи о нахождении коэффи-

циента затухания (см., например, [4, 5]), считая, что затухание на длине волны мало. Нужно найти решения уравнений гидродинамики для случая, когда излучателем возбуждается плоская монохроматическая волна с амплитудой ξ_{01} , частотой ω_1 . В эйлеровой системе координат исходными уравнениями будут условия несжимаемости, кинематическое условие на поверхности и уравнение Бернулли:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]^3}} - gz = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2,$$

Мы считаем, что волна распространяется вдоль оси x ; ось y направлена в глубь жидкости, $\xi(x, t)$ — форма поверхности, $\varphi(x, y, t)$ — гидродинамический потенциал скоростей, σ — коэффициент поверхностного натяжения, деленный на плотность жидкости, и g — ускорение силы тяжести. Заметим, что система уравнений (1) приближенная. В качестве третьего уравнения в (1) следовало бы взять уравнение Навье—Стокса. Однако в дальнейшем мы будем рассматривать случай относительно больших чисел Рейнольдса ($R \gg 10^2$) и по этой причине членом с вязкостью пренебрежем. Условию несжимаемости жидкости $\text{div } \vec{v} = 0$, вообще говоря, удовлетворяет выражение $\vec{v} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{A}$, где \vec{v} — вектор скорости жидкости, \vec{A} — векторный потенциал скоростей. Можно показать, однако [4], что при условии малости коэффициента затухания волн α на расстоянии длины волны λ_{01} $|\text{rot } \vec{A}| / |\text{grad } \varphi| \sim M/R \ll 1$. Здесь $M = \xi_{01}/\lambda_{01}$, $R = \omega_1 \xi_{01} \lambda_{01} / \nu$ — число Рейнольдса и ν — кинематическая вязкость жидкости. Заметим, что отношение ξ_{01}/λ_{01} предполагается малым, что дает нам право отбросить знаменатель во втором члене третьего уравнения в (1).

Будем решать систему уравнений (1) методом последовательных приближений, считая, что ξ_{01}/λ_{01} мало и что граничное условие имеет вид

$$\xi(x, t)|_{x=0} = \xi_{01} \sin \omega t. \quad (2)$$

Первое приближение запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= -c_1 \xi_{01} e^{-k_1 y} \cos(\omega t - k_1 x), \\ \xi^{(1)} &= \xi_{01} \sin(\omega t - k_1 x), \end{aligned} \quad (3)$$

где c_1 — скорость и k_1 — волновое число основной волны. Уравнения второго приближения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial t} + \sigma \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial x^2} - g \xi^{(2)} &= - \frac{1}{2} c_1^2 k_1^2 \xi_{01}^2 \cos(2\omega t - 2k_1 x), \\ \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial y} &= - \xi_{01} c_1 k_1^2 \xi_{01}^2 \sin(2\omega t - 2k_1 x), \\ \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ищем решения этих уравнений в виде

$$\varphi^{(2)} = \tilde{B}_1 C_1 k_1 \xi_{01}^2 e^{-2k_1 y} \sin(2\omega t - 2k_1 x) + \tilde{B}_2 C_2 k_2 \xi_{01}^2 e^{-k_2 y} \sin(2\omega t - k_2 x), \quad (5)$$

$$\xi^{(2)} = \tilde{C}_1 k_1 \xi_{01}^2 \cos(2\omega t - 2k_1 x) + \tilde{C}_2 k_2 \xi_{01}^2 \cos(2\omega t - k_2 x),$$

где $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — некоторые коэффициенты, а c_2 и k_2 — скорость и волновое число, соответствующие удвоенному значению частоты. Подставляя (5) в (4), получаем линейную систему уравнений для определения коэффициентов \tilde{B}_j и \tilde{C}_j . Решая эти уравнения, а также вводя безразмерный параметр $\Lambda \equiv \frac{\sigma}{g} k_1^2$, нетрудно найти выражение для $\xi^{(2)}$ и $\varphi^{(2)}$.

Из этих выражений легко определяются значения второго приближения вертикальной и горизонтальной компонент скорости $v_1^{(2)}$ и $v_2^{(2)}$. Общее решение для ξ_1, v_1 и v_2 с точностью до второго приближения будет иметь вид

$$\xi_1 = \xi_{01} \left\{ \sin(\omega t - k_1 x) + \frac{1 + \Lambda}{2(1 - 2\Lambda)} (k_1 \xi_{01}) \times \right.$$

$$\left. \times [\cos(2\omega t - 2k_1 x) - \cos(2\omega t - k_2 x)] \right\},$$

$$v_1 = \omega \xi_{01} \left\{ -e^{-k_1 y} \sin(\omega t - k_1 x) + \frac{k_1 \xi_{01}}{2(1 - 2\Lambda)} [-(1 + 4\Lambda) e^{-2k_1 y} \cos(2\omega t - \right.$$

$$\left. - 2k_1 x) + \xi + 2(1 + \Lambda) e^{-k_2 y} \cos(2\omega t - k_2 x)] \right\}, \quad (6)$$

$$v_2 = \omega \xi_{01} \left\{ \xi e^{-k_1 y} \cos(\omega t - k_1 x) + \frac{k_1 \xi_{01}}{2(1 - 2\Lambda)} [-(1 + 4\Lambda) e^{-2k_1 y} \sin(2\omega t - \right.$$

$$\left. - 2k_1 x) + 2(1 + \Lambda) e^{-k_2 y} \sin(2\omega t - k_2 x)] \right\}.$$

Наряду с параметром Λ удобно ввести так называемое дисперсионное число $D = (c_{2\omega} - c_{1\omega})/c_{1\omega}$ где $c_{1\omega}$ и $c_{2\omega}$ — фазовые скорости первой и второй гармоник соответственно; D в определенной степени характеризует эффективность обмена энергией между основной и второй гармониками. Заметим, что $k_2/k_1 = 2/(1 + D)$.

Учитывая дисперсионное уравнение для поверхностных волн

$$\omega^2 = kg + k^3 \sigma, \quad (7)$$

получим

$$c_2^2 - c_1^2 = g/k_1 \left\{ \frac{1 - D}{1 + D} \Lambda - \frac{1 - D}{2} \right\},$$

$$c_2^2 = c_1^2 (1 + D)^2 = (1 + D)^2 (1 + \Lambda) g/k_1. \quad (8)$$

Из этих уравнений следует, что Λ и D связаны соотношением

$$\Lambda = \frac{(1 + D)^2 - \frac{1 + D}{2}}{\frac{2}{1 + D} - (1 + D)^2}. \quad (9)$$

В области гравитационных волн $D \rightarrow -0,5$ при $\Lambda \rightarrow 0$; для капиллярных волн $D \rightarrow 0,26$, а $\Lambda \rightarrow \infty$. Отсутствие синхронизма ($D \neq 0$) приводит к тому, что возникающая вторая гармоника оказывается модулированной по амплитуде в пространстве с периодом модуляции

$$\Delta = \frac{2\pi}{|2k_1 - k_2|} = \frac{|1+D|}{|2D|} \lambda_1. \quad (10)$$

В этом случае $\xi^{(2)}$ можно записать в виде

$$\xi^{(2)} = \frac{1+\Lambda}{1-2\Lambda} \xi_{01} (k_1 \xi_{01}) \sin \frac{2k_1 - k_2}{2} x \sin \left(2\omega t - \frac{2k_1 + k_2}{2} x \right). \quad (11)$$

Если $D \rightarrow 0$ (т. е. $\Lambda \rightarrow \frac{1}{2}$), имеется синхронизм и фазовые скорости первой и второй гармоник совпадают. Полагая $c_2 \rightarrow c_1$ (или, что то же, $k_2 \rightarrow 2k_1$), получим

$$\xi^{(2)} = \frac{3}{28} \xi_{01} (k_1 \xi_{01}) (k_1 x) \sin (2\omega t - 2k_1 x). \quad (12)$$

Аналогичная ситуация имеет место и для $v_1^{(2)}$ и $v_2^{(2)}$, которые при этом также нарастают в пространстве.

Для нахождения нелинейного коэффициента затухания α_1 с учетом второго приближения считаем, что в состоянии равновесия изменение полной энергии в единицу времени равно работе вязких сил за период (4, 5). Полная энергия, отдаваемая излучателем жидкости и приходящаяся на единицу поверхности, равна $E_{\Pi} = \frac{1}{2} \rho k_1 c_1^2 \xi_{01}^2$. Работа же вязких сил A определится как среднее за период значение величины $p_{yy} v_2 + p_{yx} v_1$, где

$$\begin{aligned} p_{yy} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_2}{\partial y}, \\ p_{yx} &= \eta \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

и где η — сдвиговая вязкость.

Используя (6), можно определить среднюю за период работу вязких сил, которая оказывается равной

$$\begin{aligned} A &= -2\eta\omega^2 k_1 \xi_{01}^2 \left\{ 1 + \frac{(k_1 \xi_{01})^2}{(1-2\Lambda)^2} \left[\frac{k_2}{k_1} (1+\Lambda)^2 + \frac{1}{2} (1+4\Lambda)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1+\Lambda)(1+4\Lambda) \left(1 + \frac{k_2}{2k_1} \right) \cos (2k_1 - k_2) x \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Как видно из полученного соотношения, работа A зависит от координаты x . Усредняя A за пространственный период $\Delta = 2\pi/2k_1 - k_2$, имеющий порядок λ_{01} , получим, что среднее по x значение работы $\langle A \rangle$ имеет вид (14), только без последнего слагаемого в квадратных скобках.

Сравнивая $\langle A \rangle$ и выражение для полной энергии, видим, что

$$\langle A \rangle = -4\eta\rho_0 k_1^2 \left\{ 1 + \frac{(k_1 \xi_{01})^2}{(1-2\Lambda)^2} \left[\frac{k_2}{k_1} (1+\Lambda)^2 + \frac{1}{2} (1+4\Lambda)^2 \right] \right\} E_{\Pi}. \quad (15)$$

Записывая уравнение баланса для состояния равновесия и учитывая, что коэффициент затухания α определяется как отношение $\alpha = \langle A \rangle / 2E_{\Pi}$, получаем нелинейный коэффициент затухания

$$\alpha_1 = \alpha_0 \left\{ 1 + \frac{(k_1 \xi_{01})^2}{(1-2\Lambda)^2} \left[\frac{k_2}{k_1} (1+\Lambda)^2 + \frac{1}{2} (1+4\Lambda)^2 \right] \right\}. \quad (16)$$

Для случая чисто капиллярных волн, когда $\Lambda \gg 1$:

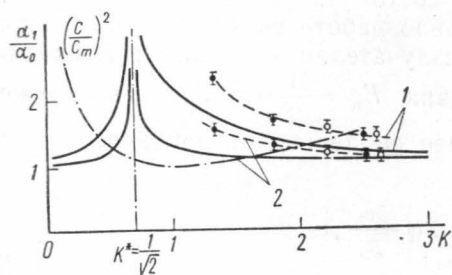
$$\alpha_1 = \alpha_0 \left\{ 1 + (k_1 \xi_{01})^2 \left(2 + \frac{\sqrt[3]{4}}{4} \right) \right\}. \quad (16')$$

Здесь $\alpha_0 = 2\nu k_1^2$ коэффициент затухания волны бесконечно малой амплитуды.

На рисунке показано изменение α_1/α_0 в зависимости от k_1 при различных значениях ξ_{01}/λ_{01} , согласно выражению (16). На этом рис. приведено также сравнение теоретических кривых с данными эксперимента, приведенными в [3]. На графиках приняты такие обозначения:

$$c^2 = \left(\frac{c}{c_m} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(K + \frac{1}{K} \right); \quad K = \frac{k}{k_m}; \quad k_m = \left(\frac{g}{\sigma} \right)^{1/2}.$$

Для воды $k_m = 3,7 \text{ см}^{-1}$ ($\lambda_m = 1,7 \text{ см}$), $c_m = 23,2 \text{ см/сек}$. При $K = K^* = \sqrt{2}/2$ скорости основной волны и второй гармоники совпадают.



Кривая 1 соответствует случаю $\xi_{01}/\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-2}$, кривая 2 — $\xi_{01}/\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-2}$. Пунктирные линии соответствуют экспериментальным данным работы [3] для воды (\bullet) и о — ксилола (\circ).

Зависимость нелинейного затухания от волнового числа. При $K = K^*$ фазовые скорости первой и второй гармоник совпадают. Кривые 1 соответствуют случаю, когда $\xi_{01}/\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-2}$, кривые 2 — $\xi_{01}/\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-2}$. Используются экспериментальные данные для воды (\bullet) и о-ксилола (\circ).

Некоторое расхождение теории и эксперимента можно объяснить как приближенным значением α_1 для нахождения которого не учитывались члены более высокого порядка, чем второй, так же, возможно, и ошибками эксперимента. Заметим, что поскольку рассматривается отношение α_1/α_0 , нам нет необходимости делать различие между $\alpha_{1, \text{теор}} = \alpha_1$ (затухание во времени) и экспериментально полученным значением $\alpha_{1, \text{эксп}} = \alpha_x$ (затухание в пространстве). Как хорошо известно,

$\alpha_t \sim c_{\text{групп}} \alpha_x$, и поэтому $\alpha_1/\alpha_0|_t = \alpha_1/\alpha_0|_x$.

Обратим внимание на то, что на рисунке $\alpha_1/\alpha_0 \rightarrow \infty$ при $K \rightarrow K^*$. Это происходит по той причине, что график α_1/α_0 строился по (16), тогда как (16) справедливо до тех пор, пока D отлично от нуля. Если $D \rightarrow 0$, проводить усреднение по x мы не имеем права, так как в этом случае появляются нарастающие по x вторые гармоники, дающие расходимость при $x \rightarrow \infty$. Это и отражает кривая на рисунке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
2. Зарембо Л. К., Красильников В. А., Тхай-Тхань-Лонг. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астр., № 5, 132, 1969; № 6, 121, 1969.
3. Воронин В. П., Зарембо Л. К. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 6, 717, 1970.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947, стр. 784, 789.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953, стр. 369.

Поступила в редакцию
25.1.1971 г.

Кафедра
акустики