Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1972

УДК 621.373.

Ю. М. АЗЬЯН, О. В. СНИГИРЕВ, А. С. МКРТУМОВ

О РЕЖИМАХ СТАЦИОНАРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Исследовались состояния стационарной генерации автоколебательной системы с распределенным запаздыванием в цепи обратной связи. Показано, что в такой системе возможно и жесткое возбуждение колебаний. Рассчитаны параметры предельных циклов при мягком и жестком возбуждении систем.

В работе [1] было показано, что в автоколебательной системе (рис. 1), состоящей из усилителя и LC-цепи обратной связи с нелинейной фазо-частотной характеристикой, возможно мягкое возбуждение набора неэквидистантных по частоте колебательных компонентов.

Если при рассмотрении процессов мягкого возбуждения колебаний можно считать усилитель линейным, то при рассмотрении установившихся колебаний необходимо учитывать нелинейность характеристики усилителя.

Нелинейная характеристика усилителя приводит к нелинейному интегральному уравнению [1, 2] для стационарных колебаний:

$$F[u(t)] = 2N \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{J_{2N}(\omega_0 \tau)}{\tau} U(t-\tau)\, d\tau, \qquad (1)$$

здесь $U(t)$ — сигнал в системе; $F[U] = kU + \beta U^3$ — характеристика усилителя, связывающая входной и выходной его сигналы ($k<0$, $\beta<0$); N — число звеньев LC-цепи обратной связи; $\omega_0 = \dfrac{2}{\sqrt{LC}}$ — частота среза; $J_{2N}(\cdot)$ — цилиндрическая функция первого рода, порядка $2N$.

До настоящего времени не существовало способов решения уравнения (1), позволяющих по заданным значениям параметров автоколебательной системы $\left(N, \omega_0, 1 \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial u}\Big|_{(u=0)} \text{ и т. д.}\right)$ рассчитать с достаточной точностью параметры возможных предельных циклов.

В данной работе излагается методика решения уравнения (1) с помощью ЭЦВМ и приводятся результаты расчетов, показывающие зависимости параметров предельных циклов от параметров системы, а также результаты экспериментальной проверки полученных решений (2).

1. Будем искать периодические решения уравнения (1).

Как известно, периодическую функцию можно приблизить рядом Фурье:

$$U(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos\left[(2k+1)\,\omega t+\varphi_{2k+1}\right]. \qquad (2)$$

В выражении (2) отсутствуют четные гармоники в силу нечетности характеристики $F[U]$.

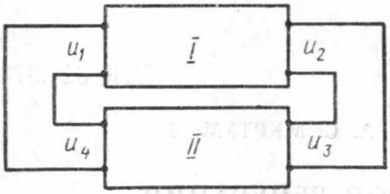


Рис. 1. Блок-схема автоколебательной системы: I — усилитель, $U_1=F[U_2]$; II — цепь обратной связи с функцией отклика $h(t)$.

$$U_4(t)=\int_0^t h(\tau)\,U_3(t-\tau)\,d\tau$$

Так как амплитуды гармоник, имеющих частоту выше ω_0, ничтожно малы, а сдвиги фаз для всех $\omega>\omega_0$ на цепи обратной связи не зависят ни от коэффициента усиления системы $1\Big/\dfrac{\partial F}{\partial u}\Big|_{(u=0)}$, ни от частоты генерации ω и всегда равны $N\pi$, то эти гармоники можно опустить в (2) без потери информации о стационарном режиме, который является результатом взаимодействия на нелинейности гармоник, лежащих в полосе пропускания фильтра.

Запишем $U(t)$ в виде

$$U(t)=\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}\cos\left[(2k+1)\,\omega t+\varphi_{2k+1}\right]$$

и подставим в уравнение (1), где $F[U]=kU+\beta U^3$ $(k<0,\ \beta<0)$.

Подобная аппроксимация характеристики усилителя, в которой $F[U]$ — сигнал на входе, а U — сигнал на выходе усилителя, выбрана не случайно, а с целью максимального приближения к реальным характеристикам усилителей в широком диапазоне изменения U при относительно простой в математическом отношении записи. Кроме того, в данном случае по заданной характеристике можно создать реальный прибор, что открывает путь к экспериментальной проверке полученных результатов.

Подставив $U(t)$ в виде «укороченного» ряда в уравнение (1), получаем

$$F\left[\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}\cos\psi_{2k+1}\right]=\int_{-\infty}^{t} 2N\,\frac{J_{2N}(\omega_0\tau)}{\tau}\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}\cos\psi_{2k+1}\,d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}\left\{\cos\left(2N\arcsin\frac{(2k+1)\,\omega}{\omega_0}\right)\cos\psi_{2k+1}+\right.$$

$$\left.+\sin\left(2N\arcsin\frac{(2k+1)\,\omega}{\omega_0}\right)\sin\Psi_{2k+1}\right\}, \qquad (3)$$

где $\Psi_{2k+1}=(2k+1)\,\omega t+\varphi_{2k+1}$.

Вычислив первые n косинус-коэффициентов и n синус-коэффициентов ряда Фурье $F[U]$ и приравнивая их стоящим справа в уравнении (3) коэффициентам, получим систему $2n$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $2n$ неизвестных: $a_1, a_3, \ldots a_{2n-1}$; ω; $\varphi_3, \varphi_5, \ldots \varphi_{2n-1}$.

Всегда можно считать, что $\varphi_1 \equiv 0$, так как выбор начала отсчета времени произволен.

Вычисление коэффициентов ряда Фурье $F[U(t)]$ представляет весьма трудоемкую операцию. Если в полосе пропускания фильтра лежит небольшое число гармоник, то можно вычислить данные коэффициенты аналитически. Если же в полосе находится больше 5—6 гармоник, то лучше вычислять коэффициенты непосредственно при решении системы нелинейных алгебраических уравнений на ЭЦВМ либо методом Ньютона, либо методом минимизации функционала [3].

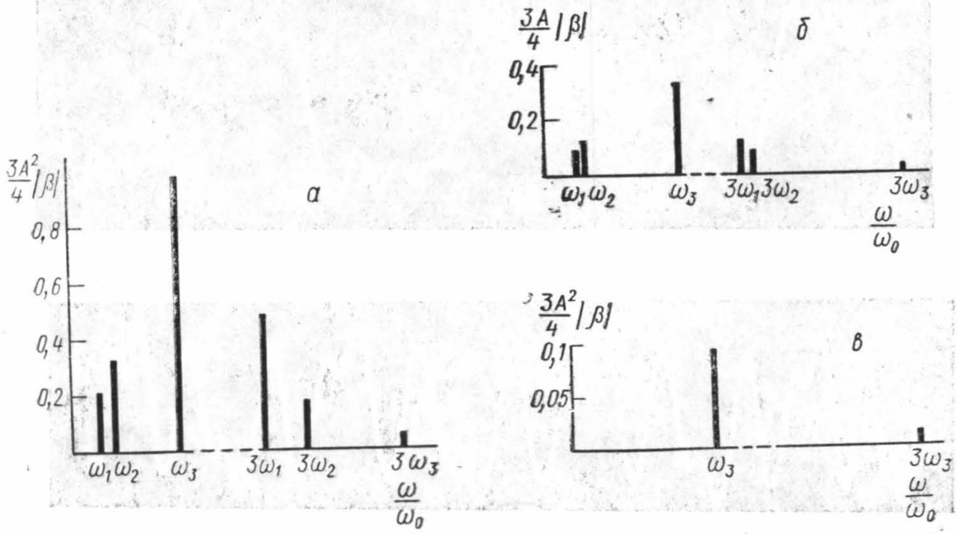


Рис. 2. Спектральные составы возможных типов стационарных колебаний: *а* — при $N=10$, $1/k=-10$, $\omega_1/\omega_0=0{,}1515$, $\omega_0=0{,}1520$, $\omega_0=0{,}1543$; *б* — при $N=10$, $1/k=-1{,}41$, $\omega_0=0{,}1516$; $\omega_0=0{,}1518$; $\omega_0=0{,}1545$; *в* — при $N=10$, $1/k=-1{,}1$, $\omega_0=0{,}1555$

Так как всегда следует ожидать, что система $2n$ нелинейных алгебраических уравнений может иметь несколько решений, то с целью нахождения всех возможных решений при заданном наборе параметров системы лучше решать $2n-1$ уравнений относительно $2n-1$ неизвестных: $a_1, a_3, \ldots a_{2n-1}$; $\varphi_3, \varphi_5, \ldots \varphi_{2n-1}$ при различных заданных значениях ω и проверять, удовлетворяют ли данная заданная величина ω и найденные при таком значении ω амплитуды $a_1, a_3, \ldots a_{2n-1}$ и фазы $\varphi_3, \varphi_5, \ldots$ $\ldots \varphi_{2n-1}$ оставшемуся уравнению.

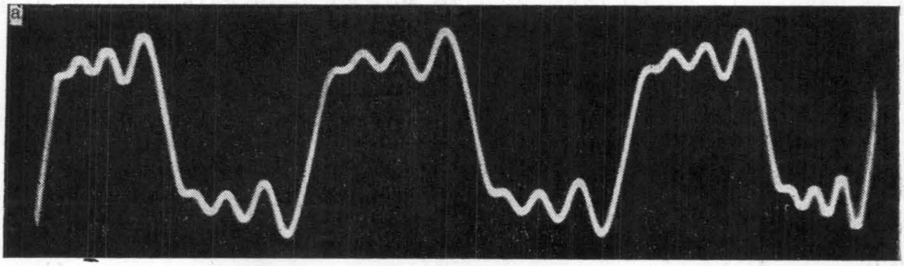
2. Изложенный выше способ решения применялся для расчета параметров предельного цикла в двухкомпонентном приближении.

В этом случае $u(t) = a_1 \cos \omega t + a_3 \cos(3\omega t + \varphi_3)$, и вычисляя коэффициенты Фурье $F[U(t)]$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\cos(\Delta\varphi_1) &= k + \frac{3}{4}\beta(a_1^2 + 2a_3^2) + \frac{3}{4}\beta a_1 a_3 \cos\varphi_3,\\
\sin(\Delta\varphi_1) &= -\frac{3}{4}\beta a_1 a_3 \sin\varphi_3,\\
\cos(\Delta\varphi_3) &= k + \frac{3}{4}\beta(a_3 + 2a_1) + \frac{1}{4}\beta\frac{a_1^3}{a_3}\cos\varphi_3,\\
\sin(\Delta\varphi_3) &= \frac{1}{4}\beta\frac{a_1^3}{a_3}\sin\varphi_3;
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\Delta\varphi_1 = 2N \arcsin \frac{\omega}{\omega_0}$, $a\Delta\varphi_3 = 2N \arcsin \frac{3\omega}{\omega_0}$ — сдвиги фаз сигналов частоты ω и 3ω в цепи обратной связи соответственно.

Величина $1/k$ эквивалентна коэффициенту усиления усилителя при малом сигнале.



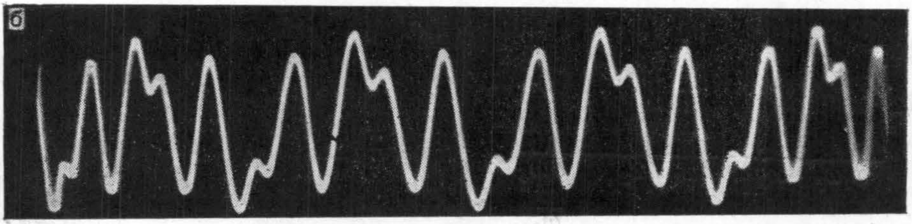


Рис. 3. Осциллограммы: *а* — мягко возбужденные колебания $a_1 \gg a_3$ и *б* — жестко возбужденные колебания $a_1 < a_3$

Число звеньев LC-цепи равно 10 в одном случае и 18 в другом. Согласно формуле (10) [1] в первом случае в полосе пропускания фильтра может находиться только третья гармоника низшей возможной частоты возбуждения. Во втором случае в полосе пропускания находятся и гармоники более высоких порядков, учет только третьей является определенным приближением, позволяющим получить качественно верные результаты при небольших затратах машинного времени.

При $N = 10$ и $N = 18$ величина $|1/k|$ изменялась от значения, немного большего 1, соответствующего появлению неустойчивости состояния покоя системы, до 10. В результате расчетов было получено, что при $1 < |1/k| \leqslant 1{,}25$ имеется один режим генерации, соответствующий установившимся колебаниям при мягком возбуждении системы. Для него характерно, что $a_1 \gg a_3$, $\cos\varphi_3 > 0$, частота генерации ниже частоты, дающей сдвиг фазы π в цепи обратной связи, при увеличении $|1/k|$ она непрерывно уменьшается. При $|1/k| > 1{,}25$ появляются еще два возможных режима автоколебаний, жесткие по возбуждению. Для самой низкой частоты генерации характерно, что $a_3 > a_1$, $\cos\varphi_3 > 0$ и частота уменьшается при увеличении коэффициента усиления системы. Для жесткого режима автоколебаний $a_3 \approx \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} a_1$, $\cos\varphi_3 < 0$ частота генерации при увеличении $|1/k|$ растет по величине.

Во всех возможных состояниях системы при увеличении усиления амплитуды сигналов растут, т. е. система увеличивает кинетическую энергию.

На рис. 2 показаны теоретически полученные спектры, соответствующие стационарным колебаниям системы при различных значениях ее параметров. Существование жестко возбуждаемых режимов генерации возможно лишь при определенных значениях и номера возможной частоты возбуждения. Так, при $N=18$, 20 около второй возможной частоты возбуждения жестких режимов нет. И так как $F[u]$ — антисимметричная функция с $1\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{u=0}>1$, то можно предположить, что природа жестких автоколебаний объясняется свойствами нелинейной фазовой характеристики цепи обратной связи.

Для экспериментальной проверки предложенного способа решения уравнения (1) была собрана автоколебательная система, состоящая из нелинейного усилителя и 18 звеньев LC-цепи обратной связи с частотой среза $f_0 \approx 20$ *кгц*. В усилителе с целью получения антисимметричной характеристики $F[u]=ku+\beta u^3$ (k, $\beta<0$) были разнесены конструктивно усиливающий и ограничивающий элементы. Усиление производилось на мощном тетроде 6Э5П, обладающем большим линейным участком анодно-сеточной характеристики, после чего сигнал ограничивался сверху и снизу амплитудным диодным ограничителем. Через катодный повторитель обеспечивалась стабилизация рабочей точки на середине линейного участка лампы. Второй катодный повторитель использовался для согласования выходного сопротивления усилителя с волновым сопротивлением линии. Для жесткого возбуждения колебаний использовался генератор стандартных сигналов ГСС-4А в режиме импульсной генерации. Напряжение с выхода цепи обратной связи подавалось на вход осциллографа ИО-4 и на спектроанализатор СА-20 с разрешением в 4 *гц*.

Авторы благодарят проф. В. В. Мигулина и М. Д. Карасева за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азьян Ю. М., Мигулин В. В. «Радиотехника и электроника», **1**, вып. 4, 1956.
2. Снигирев О. В., Азьян Ю. М. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **12**, № 4, 437, 1971.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., 1962.

Поступила в редакцию
25.1 1971 г.

Кафедра
физики колебаний