Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1972

УДК 537.311.33

И. П. ЗВЯГИН

О «КРИТЕРИИ nL» В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДОМЕНОВ

Рассмотрен вопрос о виде граничных условий для флуктуаций в полупроводнике с горячими электронами. Исследовано влияние вида граничных условий на условия устойчивости пространственно-однородного распределения напряженности поля и плотности заряда в полупроводнике с отрицательной дифференциальной проводимостью (для случая дрейфовой нелинейности).

Известно, что устойчивость «по импедансу» электрической системы определяется положением нулей и полюсов ее импеданса на плоскости комплексной частоты ω[1]. Исследования импеданса полупроводника с горячими электронами позволили, в частности, рассмотреть условия устойчивости однородного состояния в случае, когда дифференциальная проводимость отрицательна. Так, для дрейфовой модели, когда подвижность считается локальной и мгновенной функцией напряженности электрического поля, $\mu=\mu[E(x, t)]$ (эту модель мы и рассматриваем в дальнейшем), было показано, что полюсы импеданса в однородном случае располагаются в нижней полуплоскости ω, т. е. система устойчива лишь в том случае, если произведение концентрации носителей n на длину образца L [2, 3] не превышает некоторого значения («критерий nL»). Этот результат был получен в предположении о том, что флуктуация напряженности электрического поля $\delta E(x, t)$ обращается в нуль на контакте с металлом. Существование «критерия nL» было убедительно подтверждено экспериментально (см., например, [4]).

Следует, однако, подчеркнуть, что выражение для импеданса зависит от вида граничных условий, накладываемых на флуктуации. Так, для периодических граничных условий ограничений, приводящих к «критерию nL», вообще не возникает [1]. Для условий, фиксирующих полную концентрацию на границах, импеданс не имеет нулей, и для рассматриваемой модели в режиме заданного напряжения однородное состояние системы всегда оказывается устойчивым по импедансу. Эти примеры показывают, что вид граничных условий для малых флуктуаций влияет на поведение системы и потому весьма существен. Выяснению вида и роли граничных условий посвящена настоящая статья.

---

[1] О различиях между устойчивостью «по импедансу» и флуктуационной устойчивостью см. в [1].

Граничные условия для флуктуаций

Уравнение, описывающее поведение флуктуаций в рассматриваемой модельной системе с дрейфовой нелинейностью, нетрудно получить как и обычно, линеаризуя исходные уравнения (уравнение Пуассона и выражение для плотности полного тока) по малым отклонениям от пространственно-однородного состояния. Переходя далее к фурье-представлению по времени $\delta E(x, \omega) = \int dt e^{-i\omega t} \ \delta E(x, t)$, находим

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{v}{D}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{D}\left(i\omega - \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}\frac{dv}{dE}\right)\right]\delta E(x, \omega) - \frac{4\pi}{\varepsilon D}\delta I(\omega), \tag{1}$$

где $\rho = en$ — плотность подвижного заряда, $v = \mu(E)E$ — дрейфовая скорость, D — коэффициент диффузии (для простоты считаемый постоянным), ε — диэлектрическая проницаемость, а $\delta I(\omega)$ — фурье-образ флуктуации тока во внешней цепи (поперечное сечение образца мы выбираем равным единице).

Точное граничное условие можно получить, лишь детально рассматривая ситуацию на контакте металл — полупроводник, с учетом возможного разогрева электронного газа контактным полем. Однако можно ожидать, что для тонких контактов ($l_k \ll l$, l_k — толщина контакта, l — длина свободного пробега по импульсу) эффект такого разогрева может быть мал [5], и им можно пренебречь. Считая контакт тонким и пренебрегая захватом носителей в контактном слое, запишем граничные условия в виде

$$I = j_1 - j_2, \tag{2}$$

где j_1/e и j_2/e — потоки носителей через контактную поверхность из металла в полупроводник и обратно (для катода в случае полупроводника n-типа j_1/e есть именно поток, направленный из металла в полупроводник). В обычных условиях поток из металла в полупроводник j_1/e практически не зависит от приложенного напряжения, поток же j_2/e определяется условиями в полупроводнике вблизи контакта $j_2 = j_2(E, \partial E/\partial x, I)\,|_{x=0}$.

Варьируя условие (2), получаем

$$\left[\frac{\partial \delta E(x, \omega)}{\partial x} + \alpha_i \delta E(x, \omega)\right]_{x=x_i} = a_i \delta I(\omega), \tag{3}$$

где индексы $i=1, 2$ относятся к катоду и к аноду соответственно, $x_1 = 0$, $x_2 = L$, а

$$\alpha_1 = \frac{\partial j_2}{\partial E}\left(\frac{\partial j_2}{\partial(\partial E/\partial x)}\right)^{-1}\Bigg|_{x=0}, \quad a_1 = \left(1 + \frac{\partial j_2}{\partial I}\right)\left(\frac{\partial j_2}{\partial(\partial E/\partial x)}\right)^{-1}\Bigg|_{x=0} \tag{3'}$$

и т. д. Условия (3′) представляют собой линейные неоднородные условия для уравнения (1), записанные для каждого из контактов в отдельности. Для того чтобы реально найти вид коэффициентов $\alpha_1, \ldots$, нужно знать j_2, т. е. вид функции распределения вблизи контактов. Действительно:

$$j_2 = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_{\substack{|v_x| > \tilde{v} \\ v_x < 0}} d\vec{p}\, v_x f(x, \vec{p})\Big|_{x=0}, \tag{4}$$

где интеграл берется по всем значениям импульса, при которых горизонтальная (в направлении нормали к плоскости контакта) составляющая скорости v_x должна быть направлена наружу и по величине достаточной для преодоления приконтактного потенциального барьера $|\widetilde{v}_x|_2 > \widetilde{v}$.

В общем случае расчет функции распределения горячих электронов представляет собой отнюдь не простую задачу, однако основные качественные результаты не очень чувствительны к величине коэффициентов α_i и a_i. Для оценки последних можно, по-видимому, воспользоваться приближением сдвинутого максвелловского распределения, полагая

$$f(\vec{p}) = C \exp \frac{(\vec{p} - \vec{p}_0)^2}{2mkT}, \tag{5}$$

где p_0 — импульс дрейфа, m — эффективная масса, а T — электронная температура. При этом вычисление интеграла (4) уже не составляет труда:

$$j_2 = \frac{1}{4} en\bar{v}\,(e^{-\xi^2} - \sqrt{\pi}\,\xi_0 erfc\xi), \tag{6}$$

где $\bar{v} = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}$, $\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\tilde{v}}{\bar{v}} \frac{v_0}{\bar{v}}$, $\xi_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(v_0/\bar{v})$, $v_0 = p_0/m$.

В пределе очень малых напряженностей внешнего поля $v_0 \to 0$ [6] получим результат стандартной теории контакта

$$j_2 = \frac{1}{4} en\bar{v} \exp\left[-\frac{4}{\pi}(\tilde{v}/\bar{v})^2\right].$$

Величина v_0 определяет плотность тока проводимости через контакт, отсюда выражение (6) зависит от напряженности поля лишь неявно, через v_0. Поэтому если пренебречь током смещения, то в формуле (3) величины α_i и a_i даются выражениями

$$\alpha_{1,2} = 0,\; a_i = \frac{16\pi e}{\varepsilon v} e^{\xi^2} \frac{1 - erfc\xi + (\pi/2)\,(\tilde{v}/\bar{v})\, e^{-\xi^2}}{1 - \sqrt{\pi}\,\xi_0 e^{\xi^2} erfc\xi}. \tag{7}$$

Как видим, величина a_i зависит и от свойств контакта $(\tilde{v})$, и от тока, протекающего через контакты ξ и ξ_0. В более общем случае без обращения к столь простым моделям вычисление величин α_i и a_i наталкивается на значительные трудности. Поэтому представляет интерес исследовать влияние граничных условий (3) на характер распределения напряженности поля и плотности заряда, рассматривая α_i и a_i как феноменологические параметры. К этому мы и перейдем, используя результат (7) лишь для ориентировки.

Импеданс однородной системы при граничных условиях общего вида

Импеданс однородного образца длиной L для граничных условий (3) нетрудно найти из уравнения (1). Он равен

$$Z(\omega) = \frac{\int_0^L \delta E(x,\ \omega)dx}{\delta I(\omega)} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{1}{i\omega - \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}\frac{dv}{dE}} \times$$

$$\times \left\{ L + \frac{k_2 (e^{k_1 L} - 1) [\alpha_1 (k_2 + \alpha_2) e^{k_2 L} - \alpha_2 (k_2 + \alpha_1)] - }{k_1 k_2 [(k_2 + \alpha_1)(k_1 + \alpha_2) e^{k_1 L} - } \right.$$

$$\left. \frac{- k_1 (e^{k_2 L} - 1) [\alpha_1 (k_1 + \alpha_2) e^{k_1 L} - \alpha_2 (k_1 + \alpha_1)]}{- (k_1 + \alpha_1)(k_2 + \alpha_2) e^{k_2 L}]} \right\} -$$

$$- \frac{k_2 (e^{k_1 L} - 1) [a_1 (k_2 + \alpha_2) e^{k_2 L} + a_2 (k_2 + \alpha_1)] + k_1 (e^{k_2 L} - 1) [a_1 (k_1 + \alpha_2) e^{k_1 L} + a_2 (k_1 + \alpha_1)]}{k_1 k_2 [(k_2 + \alpha_1)(k_1 + \alpha_2) e^{k_1 L} - (k_1 + \alpha_1)(k_2 + \alpha_2) e^{k_2 L}]}, \tag{8}$$

где

$$k_{1,2} = \frac{v}{2D} \pm \sqrt{\left(\frac{v}{2D}\right)^2 - \frac{i\omega}{D} + \frac{4\pi\rho}{\varepsilon D} \frac{dv}{dE}}. \tag{9}$$

Рассмотрим предельный случай малого коэффициента диффузии $(D/Lv \ll 1)$ [1—3]; при этом величина k_1 становится очень большой, а

$$k_2 \to k = \frac{1}{v} \left(i\omega - \frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \frac{dv}{dE} \right). \tag{9'}$$

Выражение (8) упрощается:

$$Z(\omega) = - \frac{(\beta\eta - s) a_1 L^2}{s^2 (s + \alpha_1)} \left[1 - \beta S - e^s + \beta \frac{(1 + \beta) \eta}{\beta\eta - S} s \right], \tag{8'}$$

где

$$\beta = \frac{4\pi}{\varepsilon a_1 v}, \quad \eta = \alpha_1 L, \quad s = kL. \tag{10}$$

Положение нулей импеданса определяется условием

$$1 - \beta s - e^s + \beta \frac{(1 + \beta) \eta}{\beta\eta - s} s = 0 \ (s \neq 0), \tag{11}$$

которое при $\eta \to \infty$, т. е. при переходе к граничному условию вида $\delta E(x, \omega)|_{x=0}$, переходит в известное уравнение, приводящее к «критерию nL» [3]. Этот критерий получается и в нашем случае, если есть отличные от нуля комплексные корни уравнения (11), причем вещественные части всех их положительны. Если $\zeta_1 = ReS_1 > 0$, s_1 — корень с наименьшей вещественной частью, то, согласно (9′), появление нуля импеданса в верхней полуплоскости ω, приводящее к неустойчивости однородного состояния, происходит на участке, где $dv/dE < 0$ при

$$nL > \frac{\varepsilon}{4\pi e} \left(- \frac{d \ln v}{dE} \right)^{-1} \zeta_1 \equiv (nL)_{\text{кр}}. \tag{12}$$

Для случая (7), когда $\alpha_1 = 0$ $(\eta = 0)$, уравнение (11) принимает вид

$$1 - \beta s - e^s = 0. \tag{11'}$$

Зависимость величины ζ_1 от параметра β представлена на рис. 1. Мы видим, что ни для каких β не существует корней с отрицательной вещественной частью. Значение $\beta = -1$ отвечает граничным условиям $\delta E = 0$ на контакте, принятым в работах [2 и 3]. В нашем случае величина β положительна; величина ζ_1 при не очень малых β довольно медленно меняется. Таким образом, несмотря на указанное различие, для всех конечных значений β критерий (12) сохраняет силу, хотя значение $(nL)_{\text{кр}}$ несколько меняется. Это дает основание утверждать, что этот критерий не есть специфическое свойство, связанное с определенным типом граничных условий, а справедлив при весьма общем их виде.

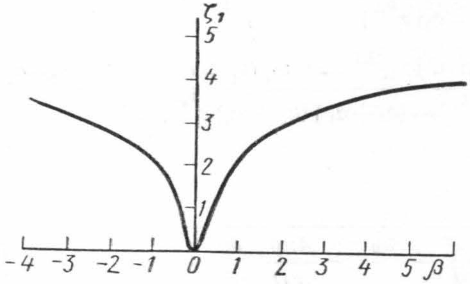

Рис. 1

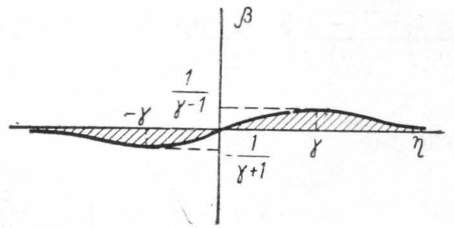

Рис. 2

В заключение для полноты исследуем случай произвольных β и η. Соответствующий анализ показывает, что при этом на плоскости (β, η) появляется область, в которой вещественная часть корня s отрицательна (эта область заштрихована на рис. 2). Заштрихованную область ограничивает кривая

$$\beta = \frac{2\eta}{\eta^2 - 2\eta + \gamma^2}$$

(здесь $\gamma = Im s$, причем $2\pi \leqslant \gamma \leqslant 3\pi$). Наличие корня с отрицательной вещественной частью означает, что система будет неустойчивой даже в коротких образцах с положительной дифференциальной проводимостью при выполнении условия $nL < -\varepsilon\zeta_1/4\pi e\,(d\ln v/dE)$.

Мы не рассматриваем вопрос о возможности такой неустойчивости, «наводимой» контактами; для остальных же значений параметров β и η неустойчивость (объемного происхождения) возникает в области, где $dv/dE < 0$ при условии, что значение (nL) превосходит критическое. Последнее может зависеть от параметров однородного состояния и через величину ζ_1.

В заключение выражаю благодарность В. Л. Бонч-Бруевичу, А. Г. Миронову, П. Е. Зильберману, П. С. Серебренникову и Э. М. Эпштейну за обсуждение настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонч-Бруевич В. Л., Серебренников П. С. «Радиотехника и электроника», **14**, 1648, 1969.
2. Kroemer H. Proc. IEEE, **52**, 1736, 1964; **53**, 1246, 1965.
3. Chynoweth A. G., Mc Cumber D. E. IEEE Trans., **ED-13**, 4, 1966.
4. Thim H. W., Barber M. R., Hakki B. W., Knight S., Uenohara M. Appl. Phys. Lett., **7**, 167, 1965.
5. Thomas G., Ping-Kuo-Lin. J. Appl. Phys., **41**, 1819, 1970.
6. Пикус Г. Е. Основы теории полупроводниковых приборов. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
20.11 1970 г.

Кафедра
физики полупроводников