Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1972

УДК 539.12.01

В. К. ДОБРЕВ

ОДНОГРАВИТОННАЯ АННИГИЛЯЦИЯ ПАРЫ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОН ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Вычислены дифференциальные и полные сечения однгравитонной аннигиляции пары электрон—позитрон в электростатическом, магнитодипольном и магнитостатическом полях. Анализируется зависимость сечения от углов и от импульса позитрона.

Наиболее вероятными из процессов взаимодействия элементарных частиц с участием свободных гравитонов считаются процессы на внешних полях. В настоящей работе рассмотрен процесс одногравитонной аннигиляции пары электрон-позитрон (или любой пары спинорных частиц массой m) во внешнем электромагнитном поле. Ранее изучались двухгравитонная аннигиляция пары электрон-позитрон [1, 2] и фотон-гравитонная аннигиляция пары электрон-позитрон [2]. Полное сечение двухгравитонной аннигиляции с ростом энергии растет; в ультрарелятивистском случае оно пропорционально квадрату энергии сталкивающихся частиц и при энергии порядка $10^{21}\cdot mc^2$ равно $0{,}7\cdot 10^{-68}$ $см^2$ [1, 2]. Полное сечение фотон-гравитонной аннигиляции тоже увеличивается с ростом энергии, но в ультрарелятивистской области становится постоянным: $0{,}7\cdot 10^{-68}$ $см^2$ [2].

Исходя из квантовой теории слабого гравитационного поля, возьмем лагранжиан взаимодействия гравитационного $h_{\mu\nu}$, электромагнитного A_μ и спинорного ψ полей [3] в виде

$$L(x) = -\frac{e\sqrt{\varkappa}}{2} h_{\mu\nu}(x) A^{ext\mu}(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) +$$

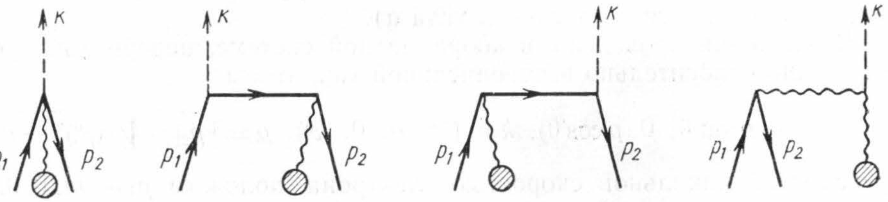
$$+ e\bar{\psi}(x)(\hat{A}(x) + \hat{A}^{ext}(x))\psi(x) +$$

$$+ \frac{\sqrt{\varkappa}}{2} h_{\mu\nu}(x)\left(\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\lambda}\right)\left(\frac{\partial A^{ext}_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^{ext\mu}}{\partial x^\lambda}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{\varkappa}}{4} h_{\mu\nu}(x)\left(-i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} + i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\nu}\gamma^\mu\psi(x)\right) + O(\varkappa). \quad (1)$$

Здесь $\varkappa$ — эйнштейновская гравитационная постоянная, e — заряд электрона. Все формулы записаны в системе единиц $\hbar=c=1$ (формулы для сечений даны в системе CGS).

Рассмотрим процесс первого порядка по $\sqrt{\varkappa}$. Интересующие нас диаграммы имеют вид:



Соответствующий матричный элемент (для упрощения использованы уравнения Дирака):

$$\langle s|S|i\rangle = \frac{ie\sqrt{\varkappa}}{(2\pi)^2\sqrt{2k^0}}\,\delta(p_1^0+p_2^0-k^0)\,h^a_{\mu\nu}\bar{v}^{\beta,-}(\vec{p}_2)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{(p_1+p_2)^2}\left[-(p_1+p_2,k)A^\mu\gamma^\nu+(p_1^\nu+p_2^\nu)(p_1^\mu+p_2^\mu)\hat{A}+\right.\right.$$

$$\left.+(p_1^\nu+p_2^\nu)A^\mu\hat{k}-(p_1+p_2,A)(p_1^\nu+p_2^\nu)\gamma^\mu\right]+\frac{p_1^\nu\hat{A}(\hat{k}\gamma^\mu-2p_1^\mu)}{2(p_1,k)}+$$

$$\left.+\frac{p_2^\nu(\gamma^\mu\hat{k}-2p_2^\mu)\hat{A}}{2(p_2,k)}\right\}v^{\alpha,-}(\vec{p}_1)=F^{a\alpha\beta}\delta(p_2^0+p_2^0-k^0), \tag{2}$$

где

$$A_\mu=A_\mu(\vec{q})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}A_\mu^{ext}(\vec{x})\,d\vec{x},\quad \vec{q}=\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{k}, \tag{3}$$

$$h^a_{\mu\nu}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\delta^1_\mu\delta^1_\nu-\delta^2_\mu\delta^2_\nu)(\delta^a_1+\delta^a_2)-i(\delta^a_1-\delta^a_2)\,\delta^1_{(\mu}\delta^2_{\nu)}\right] \tag{4}$$

(коэффициент поляризации вылетающего по оси x^3 гравитона [3]).

Число гравитонов, полученных в единицу времени в интервале импульса $d\vec{k}$ [4] (с учетом усреднения по начальным состояниям):

$$dN=(2\pi)^5 n_1n_2\sum_{a,\alpha,\beta}\frac{|F^{a\alpha\beta}|^2}{4}\delta(p_1^0+p_2^0-k^0)\,d\vec{k}=n_1n_2VdR, \tag{5}$$

где n_1 и n_2 — плотность числа начальных частиц, $V=\frac{|\vec{p}_2|}{p_2^0}C$.

При этом $[N]=сек^{-1}$, $[R]=см^5$. Отсюда

$$dR=\frac{(2\pi)^5}{4v}\sum_{a,\alpha,\beta}|F^{a\alpha\beta}|^2(k^0)^2\,d\Omega. \tag{6}$$

Вычисления проводятся независимо для трех частных случаев: однородного электрического поля, поля магнитного диполя и однородного магнитного поля.

Во всех трех случаях используем следующие обозначения для углов: α — угол между вектором импульса позитрона $\vec{p}_2$ и векторной характеристикой классического поля ($\vec{E}$, $\vec{\mu}$, $\vec{H}$ соответственно); θ, φ — углы, характеризующие направление вылета гравитона в сферической координатной системе с полярной осью по $\vec{p}_2$ (угол φ отсчитывается от оси, находящейся в плоскости угла α).

Вычисления проведены в координатной системе, повернутой пространственно относительно вышеописанной так, чтобы

$$p_2 = (p_2^0,\ -p\sin\theta,\ 0,\ p\cos\theta),\ k = (k^0,\ 0,\ 0,\ k^0),\ p \equiv |\vec{p}_2| = \sqrt{(p_2^0)^2 - m^2}.$$

Пренебрегая начальной скоростью электрона, положим $p_1 = (m, 0, 0, 0)$. Тогда $k^0 = m + p_0$, $p_0 \neq p_2^0$.

После громоздкого взятия шпура и суммирования по поляризациям гравитона получаем.

1. Однородное электрическое поле $\vec{E}$ в объеме abd (поле направлено вдоль ребра длиной d):

$$A_0(\vec{x}) = -\vec{x}\vec{E},\ \vec{A}(\vec{x}) = 0; \tag{7}$$

$$dR = \frac{e^2}{\hbar c}\frac{\varkappa\hbar^7}{c^2}\frac{E^2}{2(2\pi)^2}\frac{p\sin^2\theta}{(mc)^2(p_0 - p\cos\theta)^2}\times$$
$$\times\frac{\sin^2(Q_1 a/2\hbar)}{Q_1^2}\frac{\sin^2(Q_2 b/2\hbar)}{Q_2^2}\frac{[\sin(Q_3 d/2\hbar) - (Q_3 d/2\hbar)\cos(Q_3 d/2\hbar)]^2}{Q_3^4}\times$$
$$\times\{\sin^2\theta(p_0 - mc)(p_0 - p\cos\theta - 2mc)[(p_0 - p\cos\theta)(p_0 - mc) + 4(mc)^2] +$$
$$+ 4(mc)^2(p_0 + mc)(p_0 - p\cos\theta)\}\,d\Omega, \tag{8}$$

$$\text{где } Q_1 = (p_0 + mc)(\cos\alpha\sin\theta\cos\varphi - \sin\alpha\cos\theta) + p\sin\alpha,$$
$$Q_2 = (p_0 + mc)\sin\theta\sin\varphi,$$
$$Q_3 = (p_0 + mc)(\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi + \cos\alpha\cos\theta) - p\cos\alpha. \tag{9}$$

Используя возможность выбора α и d в полученном полном сечении, для максимализации положим

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{p}{p_0 + mc},\ d = k\pi\hbar\sqrt{\frac{2}{p_0(p_0 + mc)}},$$

$k \neq 0$ — целое число. Тогда

$$R = \int dR = \frac{e^2}{\hbar c}\frac{\hbar\varkappa}{c^2}\frac{a^2b^2d^2E^2}{256(2\pi)^2}\frac{p}{(mc)^2 p_0^3(mc + p_0)}\times$$
$$\times[p_0^4 - 4p_0^3 mc + 13p_0^2(mc)^2 - 10p_0(mc)^3 + 8(mc)^4]. \tag{10}$$

В нерелятивистском приближении ($p \ll mc$, $p_0 \approx mc$):

$$R_H = 2{,}3\cdot 10^{-64}\cdot a^2b^2d^2E^2\frac{p}{mc}\ см^5,\ \alpha = \pi/2. \tag{11}$$

В ультрарелятивистском приближении ($p \gg mc$, $p_0 \approx p$):

$$R_p = 0{,}6\cdot 10^{-64}\cdot a^2b^2d^2E^2\frac{p}{mc}\ см^5,\ \alpha = 3\pi/4. \tag{12}$$

Если E в единицах $в/м$:

$$R_p = 1{,}7 \cdot 10^{-60} \cdot a^2 b^2 d^2 E^2 \frac{p}{mc} \ см^5. \tag{13}$$

Для $a = b = d = 10^2$ $см$, $E = 10^9$ $в/м$, $\frac{p}{mc} = 2 \cdot 10^3$,

$$R_p = 3{,}4 \cdot 10^{-43} \ см^5.$$

2. Поле магнитного диполя:

$$A_0(\vec{x}) = 0, \ \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|^3} [\vec{\mu}, \ \vec{x}]; \tag{14}$$

$$dR = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\varkappa \hbar}{c^2} \frac{\mu^2}{8} \frac{1}{p(p_0 - p\cos\theta)^2} \times$$

$$\times \Big\{ \sin^2\alpha \sin^2\varphi (p_0 + mc - p\cos\theta)^2 \times$$

$$\times \Big[\frac{(p_0 + mc - p\cos\theta)(2mc - p\cos\theta + (p_0 - mc)\cos^2\theta)}{8(mc)^2} +$$

$$+ \frac{\sin^2\theta (p_0 - mc)((p_0 - mc)\sin^2\theta + 8(p_0 - p\cos\theta) - 2mc)}{16(mc)^2} -$$

$$- \frac{(p_0 - mc)^2 \sin^4\theta}{8mc(p_0 - p\cos\theta)} + \frac{(p_0 - mc)\sin^2\theta}{4(p_0 - \cos\theta)} \Big] +$$

$$+ [(\sin\alpha\cos\theta\cos\varphi - \cos\alpha\sin\theta)(p_0 + mc) - p\sin\alpha\cos\varphi]^2 \times$$

$$\times \Big[\frac{(p_0 + mc - p\cos\theta)(4mc - 2p_0 - p\cos\theta + 3(p_0 - mc)\cos^2\theta)}{8(mc)^2} +$$

$$+ \frac{\sin^2\theta (p_0 - mc)((p_0 - mc)\sin^2\theta + 8(p_0 - p\cos\theta) + 2mc)}{16(mc)^2} -$$

$$- \frac{(p_0 - mc)^2 \sin^4\theta}{8mc(p_0 - p\cos\theta)} + \frac{(p_0 - mc)\sin^2\theta}{2(p_0 - p\cos\theta)} \Big] +$$

$$+ \sin^2\alpha \sin^4\theta \sin^2\varphi p^2 (p_0 - mc) \times$$

$$\times \Big[\frac{(p_0 - mc)\sin^2\theta}{16(mc)^2} - \frac{(p_0 - mc)\sin^2\theta}{8mc(p_0 - p\cos\theta)} + \frac{1}{4(p_0 - p\cos\theta)} \Big] \Big\} d\Omega. \tag{15}$$

В нерелятивистском случае:

$$dR_H = \frac{\mu^2}{8} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\varkappa \hbar}{c^2} \frac{2}{p} [\sin^2\alpha \sin^2\varphi + (\sin\alpha\cos\theta\cos\varphi - \cos\alpha\sin\theta)^2] d\Omega, \tag{16}$$

$$R_H = 2 \cdot 10^{-59} \mu^2 \frac{mc}{p} \ см^5 \tag{17}$$

(зависимость от α исчезает).

В ультрарелятивистском случае:

$$dR_p = \frac{\mu^2}{8} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\varkappa \hbar}{c^2} \frac{p}{16(mc)^2}]\sin^2\alpha \sin^2\varphi (10 - 8\cos\theta -$$

$$- 6\cos^2\theta + 4\cos^3\theta) + (5 + 4\cos\theta + \cos^2\theta) \times$$

$$\times (\sin\alpha\cos\theta\cos\varphi - \cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\varphi)^2] d\Omega, \tag{18}$$

$$R_p = 0{,}7\cdot 10^{-62}\,\mu^2\,\frac{p}{mc}\,(26 + 21\sin^2\alpha)\ см^5 \tag{19}$$

(наиболее благоприятен угол $\alpha = \pi/2$).

Число полученных гравитонов N в нерелятивистском случае не зависит от p, а в ультрарелятивистском случае $N_p \sim p$; кроме того, $N_p > N_H$. Для $\mu = 10^4$ CGSM, $(p/mc) = 2\cdot 10^3$ имеем $R_p = 0{,}7\cdot 10^{-49}\ см^5$.

3. Однородное магнитное поле $\vec{H}$ в объеме $a\,b\,d$, направленное вдоль ребра длиной d:

$$A_0(\vec{x}) = 0,\ \vec{H}(\vec{x}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{x}) \tag{20}$$

($\vec{A}(\vec{x})$ направлено вдоль ребра длиной b);

$$dR = \frac{e^2}{\hbar c}\,\frac{\varkappa\hbar^7}{c^2}\,\frac{H^2}{(2\pi)^2}\,\frac{(p_0+mc)^2}{pmc}\,\frac{1}{Q_1^4Q_2^2Q_3^2}\times$$

$$\times \sin(Q_1a/2\hbar) - (Q_1a/2\hbar)\cos(Q_1a/2\hbar)]^2\sin^2(Q_2b/2\hbar)\sin^2(Q_3d/2\hbar)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{mc}\left[\cos^2\theta\sin^2\varphi\,((p_0+mc-p\cos\theta)^2+\sin^2\theta\,(p_0-mc)\,(3p_0-5mc-\right.\right.$$

$$-3p\cos\theta)) + \cos^2\varphi\,((p_0+mc-p\cos\theta)^2+\sin^2\theta\,(p_0-mc)\,(p_0-7mc-$$

$$\left.-p\cos\theta)) - 2\sin^4\theta\cos\theta\sin^2\varphi p\,(p_0-mc)+\frac{(p_0-mc)^2}{2}\sin^4\theta\right]+$$

$$+\left.\frac{\sin^2\theta}{p_0-p\cos\theta}\right]2\cos^2\varphi\,(p_0+mc-p\cos\theta)\,(p_0-mc)-$$

$$-4\cos\theta\sin^2\varphi p\,(p_0+mc-p\cos\theta-(p_0-mc)\sin^2\theta)-$$

$$\left.-(p_0-mc)\,((p_0-mc)\sin^2\theta-2\,mc)]\right\}d\Omega, \tag{21}$$

где Q_i из (9).

В полученном полном сечении полагаем

$$a = k\pi\hbar\sqrt{\frac{2}{(p_0+mc)\,(p_0-p\cos\theta_0)}}\ (k\neq 0\ \text{целое число}).$$

Тогда

$$R = \frac{e^2}{\hbar c}\,\frac{\varkappa\hbar}{c^2}\,\frac{a^2b^2d^2H^2}{128\,(2\pi)^2}\,\frac{(p_0+mc)\sin\theta_0}{pmc\,(p_0-p\cos\theta_0)}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{mc}\left[(p_0+mc-p\cos\theta_0)^2+\sin^2\theta_0\,(p_0-mc)\,(p_0-7mc-p\cos\theta_0)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(p_0-mc)^2}{2}\sin^4\theta_0\right]+\frac{(p_0-mc)\sin^2\theta_0}{p_0-p\cos\theta_0}\times$$

$$\left.\times[2\,(p_0-p\cos\theta_0)-(p_0-mc)\sin^2\theta_0+4mc]\right\}, \tag{22}$$

где $\theta_0 = \alpha\pm\arccos\left(\dfrac{p\cos\alpha}{p_0+mc}\right)$.

В нерелятивистском случае ($p\ll mc$, $\theta_0 = \alpha\pm\pi_2$, учитывая тот знак, который возможен, $0\leqslant\theta_0\leqslant\pi$):

$$R_H = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\varkappa \hbar}{c^2} \frac{a^2 b^2 d^2 H^2}{128 (2\pi)^2} \frac{8 |\cos\alpha|}{p} \tag{23}$$

(наиболее благоприятны углы $\alpha = 0, T$ $(\theta_0 = \pi/2)$).

В ультрарелятивистском случае $(p \gg mc,\ \theta_0 = 2\alpha,\ (\theta_0 = 0,\ R = 0),\ \alpha \leqslant \pi/2)$:

$$R_p = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\varkappa \hbar}{c^2} \frac{a^2 b^2 d^2 H^2}{128 (2\pi)^2} \frac{4p \sin^3\alpha \cos\alpha}{(mc)^2} (1 + 2\cos^2\alpha + 2\cos^4\alpha) \tag{24}$$

$\left(\text{наиболее благоприятен угол } \alpha \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{24} \left(\theta_0 \approx \frac{\pi}{2} + \frac{1}{12}\right)\right)$.

Зависимость N от p в этих предельных случаях как в случае магнитного диполя, и $N_p > N_H$. Для $a = b = d = 10^2$ *см*, $H = 10^5$ *эрст* $(p/mc) = 2 \cdot 10^3$ имеем $R_p = 0{,}57 \cdot 10^{-48}$ *см*^{5}.

Обратим внимание на следующие особенности полученных результатов: а) в случаях $\vec{E}$ и $\vec{H}$ излучение сосредоточено в плоскости, образованной направлением позитронного пучка и направлением поля $(\varphi = 0)$; б) преимущественное излучение в направлении, перпендикулярном направлению позитронного пучка $(\theta = T/2)$, имеет место лишь для случая $\vec{E}$ и для предельных приближений в поле $\vec{H}$ (в остальных случаях угол преимущественного излучения либо зависит сложным образом от α и p $(\vec{H})$, либо не существует $(\vec{\mu})$) и в) угол наиболее благоприятного расположения направления поля по отношению к направлению позитронного пучка зависит от импульса позитрона p и при $p \gg mc$ равняется $3\pi/4$ для электростатического поля $(\vec{E})$, $\pi/2$ — для поля магнитного диполя $(\vec{\mu})$, $\approx \pi/4$ — для магнитостатического поля $(\vec{H})$.

Наибольшее сечение получается в однородном электрическом поле в ультрарелятивистском приближении. Если взять для плотностей сталкивающихся потоков частиц $n_1 = 10^{19}$ *электрон/см*^{3}, $n_2 = 10^{13}$ *позитрон/см*^{3}, то $N_p \approx 1$ *гравитон/сек*.

В заключение автор искренне благодарит проф. Д. Д. Иваненко и Ю. С. Владимирова за большую помощь в работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. «Вестн. Моск. ун-та», естественная серия, № 8, 103, 1947.
2. Владимиров Ю. С. ЖЭТФ, **45**, 251, 1963.
3. Gurta S. Proc. Roy. Soc., **A 65**, 161, 608, 1952.
4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., ГИТТЛ, 1957.

Поступила в редакцию
25.11 1971 г.

Кафедра
теоретической физики