Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1972

УДК 512.972 : 517.564

В. А. ЩЕРБАКОВ

НЕПРИВОДИМЫЕ ТЕНЗОРЫ И СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Неприводимые тензоры на трехмерной группе вращений есть симметричные по всем индексам тензоры с нулевым следом. Найдены линейные комбинации декартовых компонентов этих тензоров, преобразующиеся как сферические функции. Уравнения указательных поверхностей неприводимых тензоров выражены через сферические функции. Для неприводимых тензоров от первого до шестого рангов результаты представлены в виде таблицы.

В математической физике применяются два типа реализации пространств однозначных неприводимых представлений трехмерной группы вращений: сферические функции $Y_l^m(\theta, \varphi) \equiv \langle \theta, \varphi \,|\, l, m \rangle$ и неприводимые тензоры $|D_l>$ с компонентами $D_{i_1 i_2 \ldots i_l}$. Здесь l — вес неприводимого представления, $m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$ — номер одной из $(2l+1)$-й функций, реализующих $2l+1$-мерное пространство этого представления. Тензор $|D_l>$ — симметричный по всем индексам тензор ранга l с нулевым следом; среди его различных компонентов всего $2l+1$ независимая [1].

Указательной поверхностью неприводимого тензора $|D_l>$ назовем поверхность, имеющую в полярных координатах r, θ, φ уравнение

$$r = \langle \theta, \varphi \,|\, D_l \rangle = D_{i_1} \ldots D_{i_l} S_{i_1} \ldots S_{i_l} \tag{1}$$

$$(S_1 = \sin\theta\cos\varphi,\ S_2 = \sin\theta\sin\varphi,\ S_3 = \cos\theta),$$

где $D_{i_1 \ldots i_l}$ — декартовы компоненты тензора $|D_l>$. Причем те части этой поверхности, которым соответствуют положительные значения r, будем, следуя А. В. Шубникову [2], считать окрашенными в белый цвет, а те, которым соответствуют отрицательные значения r, — в черный. Такие поверхности применяются для наглядного изображения анизотропных физических свойств кристаллов [3]. Так как любой тензор, описывающий какое-либо свойство кристалла, можно разложить на неприводимые [1], указательные поверхности неприводимых тензоров могут служить стандартными деталями для построения всевозможных тензорных указательных поверхностей.

В этой работе уравнения указательных поверхностей неприводимых тензоров выражены через сферические функции. Попутно устанавливаются соотношения между компонентом и сферической формой $|l, m>$ неприводимых тензоров. Последний по отношению к сферическим функциям играет ту же роль, которую по отношению к уравнениям указательных поверхностей выполняет компонентная форма [1].

Соотношения между сферической и компонентной формой неприводимых тензоров при $l=1$ и $l=2$ хорошо известны (см., например, [4], [8]). Для установления этих соотношений при произвольных значениях l воспользуемся представлением чисел заполнения [4], [5], применение которого для построения неприводимых тензорных представлений группы вращений показано, в частности, в [6]. Собственно набор индексов при произвольном компоненте неприводимого тензора обозначим $|n_i, n_j, n_k>$, где числа n_i, n_j, n_k показывают, сколько раз среди индексов встречаются символы i, j, k соответственно. Умножение символа $|n_i, n_j, n_k>$ на число означает, что на это число уменьшается соответствующий компонент. Набор индексов при компонентах, отнесенных к декартову базису $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$, обозначим $|n_x, n_y, n_z>$, а при компонентах, отнесенных к каноническому базису,

$$\boldsymbol{e}_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x - i\boldsymbol{e}_y);\ \boldsymbol{e}_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y);\ \boldsymbol{e}_\zeta = \boldsymbol{e}_z$$

(искомые соотношения для них существенно проще, чем для декартовых), — $|n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle$. Сумма чисел заполнения в любом базисе равна рангу тензора

$$n_i + n_j + n_k = l. \tag{2}$$

Введем символические операторные векторы уничтожения и рождения индексов $\widehat{\boldsymbol{a}}$ и $\widehat{\boldsymbol{a}}^+$; действие их компонентов на числа заполнения определяется известными равенствами

$$\widehat{a}_i\,|n_i\rangle = \sqrt{n_i}\,|n_i - 1\rangle;\ \widehat{a}_i^+\,|n_i\rangle = \sqrt{n_i+1}\,|n_i+1\rangle.$$

Любой набор индексов представляется как результат действия соответствующего набора операторов рождения и уничтожения на «индексный вакуум» [6]:

$$|n_i, n_j, n_k\rangle = \frac{1}{n_i!\ n_j!\ n_k!}\,\widehat{a}_i^{+n_i}\,\widehat{a}_j^{+n_j}\,\widehat{a}_k^{+n_k}\,|0\rangle.$$

Коммутативность операторов рождения соответствует симметричности тензора $|D_l>$, а из равенства нулю его следа вытекает соотношение

$$\widehat{\boldsymbol{a}}^{+2}\,\widehat{\boldsymbol{a}}^2\,|n_i, n_j, n_k\rangle = 0. \tag{3}$$

Пусть $\boldsymbol{K}$ — символический вектор, составленный из матриц инфинитезимального представления группы вращений; в каноническом базисе его компоненты

$$K_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix};\quad K_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad K_\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используем его для построения символического операторного вектора $\widehat{\boldsymbol{I}}$ с компонентами

[1] Строго говоря, символ $|D_l>$ должен обозначать неприводимый тензор независимо от его формы. С этой точки зрения применение символа $|D_l>$ в уравнении (1) не вполне корректно, однако оно удобно и вряд ли может повести к каким-либо недоразумениям. Соответственно термины «неприводимый тензор», «сферический тензор» иногда употребляются вместо «неприводимый тензор в компонентной форме», «неприводимый тензор в сферической форме».

$$J_\rho = (\hat{a}_\xi^+, \hat{a}_\eta^+, \hat{a}_\zeta^+) K_\rho \begin{pmatrix} \hat{a}_\xi \\ \hat{a}_\eta \\ \hat{a}_\zeta \end{pmatrix} \quad (\rho = \xi, \eta, \zeta).$$

Коммутационные соотношения между ними, как легко проверить, задаются символическим векторным произведением

$$\hat{\boldsymbol{I}} \times \hat{\boldsymbol{I}} = i\hat{\boldsymbol{I}}. \tag{4}$$

Подсчитав действие операторов $\hat{I}_\zeta$ и $\hat{\boldsymbol{I}}^2 = I_\xi I^\xi + I_\eta I^\eta + I_\zeta I^\zeta$ на числа заполнения $|n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle$, найдем

$$\hat{I}_\zeta | n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle = (n_\xi - n_\eta) | n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle, \tag{5}$$

$$\hat{\boldsymbol{I}}^2 | n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle = (\hat{\boldsymbol{a}}^{+2}\hat{\boldsymbol{a}}^2 + (n_\xi + n_\eta + n_\zeta)(n_\xi + n_\eta + n_\zeta + 1)) | n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle. \tag{6}$$

Приняв во внимание (2) и (3), перепишем последнее соотношение в виде

$$\boldsymbol{I}^2 | n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle = l(l+1) | n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle. \tag{7}$$

Таким образом, в $2l+1$-мерном пространстве компоненты $|n_\xi\ n_\eta, n_\zeta\rangle$ неприводимого тензора $|D_l>$ играют роль собственных векторов операторов $\hat{I}_\xi$ и $\hat{\boldsymbol{I}}^2$.

С другой стороны, из коммутационных соотношений (4) следует [7], что можно найти $2l+1$ сферический тензор $|l, m>$, компоненты которого являются собственными векторами операторов $\hat{I}_\xi$ и $\hat{\boldsymbol{I}}^2$ с собственными значениями m и $l(l+1)$ соответственно:

$$\hat{I}_\zeta | l, m\rangle = m | l, m\rangle, \quad \hat{\boldsymbol{I}}^2 | l, m\rangle = l(l+1) | l, m\rangle. \tag{8}$$

Сравнение формул (5) и (7) с формулами (8) показывает, что отнесенные к каноническому базису неприводимые тензоры $|n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle$ преобразуются под действием всех операций, входящих в группу вращений, точно так же, как сферические тензоры $|l, m>$, а числа заполнения n_ξ, n_η, n_ζ связаны с индексами l, m сферических тензоров соотношениями

$$\begin{cases} n_\xi + n_\eta + n_\zeta = l, \\ n_\xi - n_\eta = m. \end{cases}$$

Перейдя от канонического базиса к декартову, получим линейные комбинации компонентов неприводимых тензоров, преобразующиеся так же, как сферические функции. Вместе с соответствующими каноническими компонентами они выписаны в таблице 1.

Переписав соотношения (8) в форме

$$\begin{cases} n_\xi = \dfrac{1}{2}(l + m - n_\zeta), \\[2ex] n_\eta = \dfrac{1}{2}(l - m - n_\zeta) \end{cases}$$

$$(l = 1, 2, \ldots;\ m = -l, \ldots, l),$$

Таблица 1

Соответствие между сферическими тензорами $|l, m\rangle$ и неприводимыми тензорами в каноническом $|n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle$ и декартовом $|n_x, n_y, n_z\rangle$ базисах

l	m	$\|n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle$	$\|n_x, n_y, n_z\rangle$
1	-1	D_η	D_y
	0	D_ζ	D_z
	$+1$	D_ξ	D_x
2	-2	$D_{\eta\eta}$	D_{xy}
	-1	$D_{\eta\zeta}$	D_{yz}
	0	$D_{\zeta\zeta}$ $D_{\xi\eta}$	D_{zz} $D_{xx} + D_{yy}$
	$+1$	$D_{\xi\zeta}$	D_{xz}
	$+2$	$D_{\xi\xi}$	$D_{xx} - D_{yy}$
3	-3	$D_{\eta\eta\eta}$	$D_{yyy} - 3D_{yxx}$
	-2	$D_{\eta\eta\zeta}$	D_{xyz}
	-1	$D_{\eta\zeta\zeta}$ $D_{\eta\eta\xi}$	D_{yzz} $D_{yyy} + D_{yxx}$
	0	$D_{\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\eta\zeta}$	D_{zzz} $D_{xxz} + D_{yyz}$
	$+1$	$D_{\xi\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\eta}$	D_{xzz} $D_{xxx} + D_{xyy}$
	$+2$	$D_{\xi\xi\zeta}$	$D_{xxz} - D_{yyz}$
	$+3$	$D_{\xi\xi\xi}$	$D_{xxx} - 3D_{xyy}$
4	-4	$D_{\eta\eta\eta\eta}$	$D_{xyyy} - D_{yxxx}$
	-3	$D_{\eta\eta\eta\zeta}$	$D_{yyyz} - 3D_{yxxz}$
	-2	$D_{\eta\eta\zeta\zeta}$ $D_{\eta\eta\eta\xi}$	D_{xyzz} $D_{xxxy} + D_{yyyx}$
	-1	$D_{\eta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\eta\eta\xi\zeta}$	D_{yzzz} $D_{yyyz} + D_{yxxz}$
	0	$D_{\zeta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\eta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\eta\eta}$	D_{zzzz} $D_{xxzz} + D_{yyzz}$ $D_{xxxx} + 2D_{xxyy} + D_{yyyy}$
	$+1$	$D_{\xi\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\eta\zeta}$	D_{xzzz} $D_{xxxz} + D_{xyyz}$
	$+2$	$D_{\xi\xi\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\xi\eta}$	$D_{xxzz} - D_{yyzz}$ $D_{xxxx} - D_{yyyy}$
	$+3$	$D_{\xi\xi\xi\zeta}$	$D_{xxxz} - 3D_{xyyz}$
	$+4$	$D_{\xi\xi\xi\xi}$	$D_{xxxx} - 6D_{xxyy} + D_{yyyy}$
5	-5	$D_{\eta\eta\eta\eta\eta}$	$D_{yyyyy} - 10D_{yyyxx} + 5D_{yxxxx}$
	-4	$D_{\eta\eta\eta\eta\zeta}$	$D_{xyyyz} - D_{yxxxz}$
	-3	$D_{\eta\eta\eta\zeta\zeta}$ $D_{\eta\eta\eta\eta\xi}$	$D_{yyyzz} - 3D_{yxxzz}$ $D_{yyyyy} - 2D_{yyyxx} - 3D_{yxxxx}$
	-2	$D_{\eta\eta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\eta\eta\eta\xi\zeta}$	D_{xyzzz} $D_{xxxyz} + D_{xyyzz}$
	-1	$D_{\eta\zeta\zeta\zeta\zeta}$	D_{yzzzz}
	-1	$D_{\eta\eta\xi\zeta\zeta}$, $D_{\eta\eta\eta\xi\xi}$	$D_{yyyzz} + D_{yxxzz}$, $D_{yyyyy} + 2D_{yyyxx} + D_{yxxxx}$
	0	$D_{\zeta\zeta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\eta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\eta\eta\zeta}$	D_{zzzzz} $D_{xxzzz} + D_{yyzzz}$ $D_{xxxxz} + 2D_{xxyyz} + D_{yyyyz}$
	$+1$	$D_{\xi\zeta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\eta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\xi\eta\eta}$	D_{xzzzz} $D_{xxxzz} + D_{xyyzz}$ $D_{xxxxx} + 2D_{xxxyy} + D_{xyyyy}$
	$+2$	$D_{\xi\xi\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\xi\eta\zeta}$	$D_{xxzzz} - D_{yyzzz}$ $D_{xxxxz} - D_{yyyyz}$
	$+3$	$D_{\xi\xi\xi\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\xi\xi\eta}$	$D_{xxxzz} - 3D_{xyyzz}$ $D_{xxxxx} - 2D_{xxxyy} - 3D_{xyyyy}$
	$+4$	$D_{\xi\xi\xi\xi\zeta}$	$D_{xxxxz} - 6D_{xxyyz} + D_{yyyyz}$
	$+5$	$D_{\xi\xi\xi\xi\xi}$	$D_{xxxxx} - 10D_{xxxyy} + 5D_{xyyyy}$
6	-6	$D_{\eta\eta\eta\eta\eta\eta}$	$3D_{xxxxxy} - 10_{xxxyyy} +$ $+ 3D_{xyyyyy}$
	-5	$D_{\eta\eta\eta\eta\eta\zeta}$	$D_{yyyyyz} - 10D_{yyyxxz} +$ $+ 5D_{yxxxxz}$
	-4	$D_{\eta\eta\eta\eta\zeta\zeta}$ $D_{\eta\eta\eta\eta\eta\xi}$	$D_{xyyyzz} - D_{yxxxzz}$ $D_{xyyyyy} - D_{yxxxxx}$
	-3	$D_{\eta\eta\eta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\eta\eta\eta\eta\zeta\xi}$	$D_{yyyzzz} - 3D_{yxxzzz}$ $D_{yyyyyz} - 2D_{yyyxxz} -$ $- 3D_{yxxxxz}$
	-2	$D_{\eta\eta\zeta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\eta\eta\eta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\eta\eta\eta\eta}$	D_{xyzzzz} $D_{xxxyzz} + D_{xyyyzz}$ $D_{xxxxxy} + 2D_{xxxyyy} + D_{yyyyyx}$

$$\langle \theta,\ \varphi \mid D_6\rangle = \frac{1}{32\cdot 11!!}\,(D_{xxxxxx} - 15D_{xxxxyy} + 15D_{xxyyyy} - D_{yyyyyy})\,Y_6^{+6} + \frac{1}{16\cdot 11!!}\,(3D_{xxxxxy} - 10D_{xxxyyy} + 3D_{xyyyyy})\,Y_6^{-6} +$$

$$+ \frac{3}{8\cdot 11!!}\,(D_{xxxxxz} - 10D_{xxxyyz} + 5D_{xyyyyz})\,Y_6^{+5} + \frac{3}{8\cdot 11!!}\,(D_{yyyyyz} - 10D_{xxyyyz} + 5D_{xxxxyz})\,Y_6^{-5} +$$

$$+ \frac{3}{8\cdot 9!!}\,(D_{xxxxzz} - 6D_{xxyyzz} + D_{yyyyzz})\,Y_6^{+4} + \frac{3}{2\cdot 9!!}\,(D_{xxxxxy} - D_{xyyyyy})\,Y_6^{-4} + \frac{10}{4!7!!}\,(D_{xxxzzz} - 3D_{xyyzzz})\,Y_6^{+3} +$$

$$+ \frac{10}{4!7!!}\,(-D_{yyyzzz} + 3D_{xxyzzz})\,Y_6^{-3} + \frac{1}{28}\,(D_{xxxxzz} - D_{yyyyzz})\,Y_6^{+2} + \frac{1}{14}\,D_{xyzzzz}\,Y_6^{-2} +$$

$$+ \frac{2}{7}\,D_{xzzzzz}\,Y_6^{+1} + \frac{2}{7}\,D_{yzzzzz}\,Y_6^{-1} + D_{zzzzzz}\,Y_6^{0}$$

$$Y_l^m = \begin{cases} p_l^m \cos m\varphi, & m \geqslant 0 \\ p_l^{|m|} \sin |m|\,\varphi, & m < 0 \end{cases}; \quad p_l^m = \sin^m\theta\,\frac{1}{(2l)!!}\,\frac{d^{l+m}}{d\cos\theta^{l+m}}\,(\cos^2\theta - 1)^l \ (m \geqslant 0)$$

$$\begin{Bmatrix} p_6^6 \\ p_6^5 \\ p_6^4 \\ p_6^3 \\ p_6^2 \\ p_6^1 \\ p_6^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11!!\ \sin^6\theta \\ 11!!\ \sin^5\theta\cos\theta \\ \frac{1}{2}\,9!!\ \sin^4\theta \times (11\cos^2\theta - 1) \\ \frac{3}{2}\,7!!\ \sin^3\theta \times (11\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ \frac{1}{8}\,7!!\ \sin^2\theta(33\cos^4\theta + 18\cos^2\theta + 1) \\ \frac{11}{8}\sin\theta\,(33\cos^5\theta + 30\cos^3\theta + 5\cos\theta) \\ \frac{1}{16}\,(231\cos^6\theta - 315\cos^4\theta + 105\cos^2\theta - 5) \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} p_5^5 \\ p_5^4 \\ p_5^3 \\ p_5^2 \\ p_5^1 \\ p_5^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9!!\ \sin^5\theta \\ 9!!\ \sin^4\theta\cos\theta \\ \frac{1}{2}\,7!!\ \sin^3\theta \times (9\cos^2\theta - 1) \\ \frac{1}{2}\,7!!\ \sin^2\theta \times (3\cos^3\theta - \cos\theta) \\ \frac{15}{8}\sin\theta\,(21\cos^4\theta - 14\cos^2\theta + 1) \\ \frac{1}{8}\,(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta) \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} p_4^4 \\ p_4^3 \\ p_4^2 \\ p_4^1 \\ p_4^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7!!\ \sin^4\theta \\ 7!!\ \sin^3\theta\cos\theta \\ \frac{15}{2}\sin^2\theta\,(7\cos^2\theta - 3) \\ \frac{5}{2}\sin\theta\,(7\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ \frac{1}{8}\,(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} p_3^3 \\ p_3^2 \\ p_3^1 \\ p_3^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5!!\ \sin^3\theta \\ 5!!\ \sin^2\theta\cos\theta \\ \frac{3}{2}\sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1) \\ \frac{1}{2}\,(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} p_2^2 \\ p_2^1 \\ p_2^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\sin^2\theta \\ 3\sin\theta\cos\theta \\ \frac{1}{2}\,(3\cos^2\theta - 1) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_1^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix}$$

а присоединенные функции Лежандра $p_l^m(t)$ определяются формулой Родрига

$$p_l^m(t) = \frac{1}{(2l)!!}(1-t^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dt^{l+m}}(t^2-1)^l \quad (m \geqslant 0).$$

В заключение хочу поблагодарить научного руководителя Ю. И. Сиротина за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М., «Наука», 1965.
2. Шубников А. В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. М., Изд-во АН СССР, 1951, стр. 150.
3. Шубников А. В. Основы оптической кристаллографии. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 197.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
5. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория, ч. 1. (§ 2). М., Физматгиз, 1968.
6. Гюрши Ф. Введение в теорию групп. В сб.: «Теория групп и элементарные частицы». М., «Мир», 1967, § 4.
7. Давыдов А. С. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963, § 40.
8. Ли Цзун-дао. Математические методы в физике (гл. 3, § 10). М., «Мир», 1965.

Поступила в редакцию
27.1 1971 г.

Кафедра
физики кристаллов

l	m	$\lvert n_\xi, n_\eta, n_\zeta\rangle$	$\lvert n_x, n_y, n_z\rangle$
6	-1	$D_{\eta\zeta\zeta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\eta\eta\xi\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\eta\eta\eta\zeta\xi\xi}$	D_{yzzzzz} $D_{yyyzzz}+D_{yxxzzz}$ $D_{yyyyyz}+2D_{yyyxxz}+$ $+D_{yxxxxz}$
	0	$D_{\zeta\zeta\zeta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\eta\zeta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\eta\eta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\xi\eta\eta\eta}$	D_{zzzzzz} $D_{xxzzzz}+D_{yyzzzz}$ $D_{xxxxzz}+2D_{xxyyzz}+$ $+D_{yyyyzz}$ $D_{xxxxxx}+3D_{xxxxyy}+$ $+3D_{xxyyyy}+D_{yyyyyy}$
	$+1$	$D_{\xi\zeta\zeta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\eta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\xi\eta\eta\zeta}$	D_{xzzzzz} $D_{xxxzzz}+D_{xyyzzz}$ $D_{xxxxxz}+2D_{xxxyyz}+$ $+D_{xyyyyz}$
6	$+2$	$D_{\xi\xi\zeta\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\xi\eta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\xi\xi\eta\eta}$	$D_{xxzzzz}-D_{yyzzzz}$ $D_{xxxxzz}-D_{yyyyzz}$ $D_{xxxxxx}+D_{xxxxyy}-$ $-D_{xxyyyy}-D_{yyyyyy}$
	$+3$	$D_{\xi\xi\xi\zeta\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\xi\xi\eta\zeta}$	$D_{xxxzzz}-3D_{xyyzzz}$ $D_{xxxxxz}-2D_{xxxyyz}-$ $-3D_{xyyyyz}$
	$+4$	$D_{\xi\xi\xi\xi\zeta\zeta}$ $D_{\xi\xi\xi\xi\xi\eta}$	$D_{xxxxzz}-6D_{xxyyzz}+$ $+D_{yyyyzz}$ $D_{xxxxxx}-5D_{xxxxyy}-$ $-5D_{yyxxxx}+D_{yyyyyy}$
	$+5$	$D_{\xi\xi\xi\xi\xi\zeta}$	$D_{xxxxxz}-10D_{xxxyyz}+$ $+5D_{xyyyyz}$
	$+6$	$D_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}$	$D_{xxxxxx}-15D_{xxxxyy}+$ $+15D_{xxyyyy}-D_{yyyyyy}$

легко показать, что фиксированным значениям l и m отвечают $\left[\frac{1}{2}(l-|m|)\right]+1$ наборов [1] чисел заполнения n_ξ, n_η, n_ζ, так что только при $|m|=l$, $|m|=l-1$ числа заполнений определяются однозначно.

Различные наборы чисел заполнения, соответствующие одному и тому же компоненту сферического тензора $|l, m>$, связаны между собой условием обращения в нуль следа тензора $|D_l>$. Для $|D_2>$, например, это условие в каноническом и декартовом базисе соответственно выглядит так:

$$D_{\xi\eta}+D_{\eta\xi}-iD_{\zeta\zeta}=0,\ D_{xx}+D_{yy}+D_{zz}=0,$$

что хорошо видно из таблицы.

Полученные результаты позволяют выразить уравнения указательных поверхностей непроводимых тензоров через сферические функции. Эти уравнения в форме

$$r=\langle\theta, \varphi\,|\,D_l\rangle=\sum_{m=-l}^{l} k_{lm}Y_l^m(\theta, \varphi)$$

для $l=1, 2, \ldots, 6$ приведены в таблице 2. Коэффициенты k_{lm} выражены в ней через декартовы компоненты соответствующего неприводимого тензора, сферические функции $Y_l^m(\theta, \varphi)$ взяты в вещественной форме

$$Y_l^m(\theta, \varphi)=\begin{cases} p_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi & m\geqslant 0 \\ p_l^{(m)}(\cos\theta)\sin|m|\varphi & m<0\end{cases},$$

[1]) Квадратные скобки означают целую часть заключенного в них выражения: при N четном $\left[\frac{1}{2}N\right]=\frac{1}{2}N$, при нечетном $\left[\frac{1}{2}N\right]=\frac{1}{2}(N-1)$.

Таблица 2

Указательные поверхности $\langle \theta, \varphi \mid Dl \rangle$ неприводимых тензоров группы $O_+(3)$

$$\langle \theta, \varphi \mid D_1 \rangle = D_x Y_1^{+1} + D_y Y_1^{-1} + D_z Y_1^0$$

$$\langle \theta, \varphi \mid D_2 \rangle = \frac{1}{6}(D_{xx} - D_{yy}) Y_2^{+2} + \frac{1}{3} D_{xy} Y_2^{-2} + \frac{2}{3} D_{xz} Y_2^{+1} + \frac{2}{3} D_{yz} Y_2^{-1} + D_{zz} Y_2^0$$

$$\langle \theta, \varphi \mid D_3 \rangle = \frac{1}{4\cdot 5!!}(D_{xxx} - 3D_{xyy}) Y_3^{+3} + \frac{1}{4\cdot 5!!}(-D_{yyy} + 3D_{xxy}) Y_3^{-3} + \frac{3}{2\cdot 5!!}(D_{xxz} - D_{yyz}) Y_3^{+2} +$$
$$+ \frac{1}{5} D_{xyz} Y_3^{-2} + \frac{1}{2} D_{xzz} Y_3^{+1} + \frac{1}{2} D_{yzz} Y_3^{-1} + D_{zzz} Y_3^0$$

$$\langle \theta, \varphi \mid D_4 \rangle = \frac{1}{8\cdot 7!!}(D_{xxxx} - 6D_{xxyy} + D_{yyyy}) Y_4^{+4} + \frac{1}{2\cdot 7!!}(D_{xxxy} - D_{xyyy}) Y_4^{-4} + \frac{1}{7!!}(D_{xxxz} - 3D_{xyyz}) Y_4^{+3} +$$
$$+ \frac{1}{7!!}(-D_{yyyz} + 3D_{xxyz}) Y_4^{-3} + \frac{1}{5!!}(D_{xxzz} - D_{yyzz}) Y_4^{+2} + \frac{2}{5!!} D_{xyzz} Y_4^{-2} + \frac{2}{5} D_{xzzz} Y_4^{+1} +$$
$$+ \frac{2}{5} D_{yyzz} Y_4^{-1} + D_{zzzz} Y_4^0$$

$$\langle \theta, \varphi \mid D_5 \rangle = \frac{1}{16\cdot 9!!}(D_{xxxxx} - 10D_{xxxyy} + 5D_{xyyyy}) Y_5^{+5} + \frac{1}{16\cdot 9!!}(D_{yyyyy} - 10D_{xxyyy} + 5D_{xxxxy}) Y_5^{-5} +$$
$$+ \frac{5}{8\cdot 9!!}(D_{xxxxz} - 6D_{xxyyz} + D_{yyyyz}) Y_5^{+4} + \frac{5}{2\cdot 9!!}(D_{xxxyz} - D_{xyyyz}) Y_5^{-4} + \frac{5}{8\cdot 7!!}(D_{xxxzz} - 3D_{xyyzz}) Y_5^{+3} +$$
$$+ \frac{5}{8\cdot 7!!}(-D_{yyyzz} + 3D_{xxyzz}) Y_5^{-3} + \frac{5}{7!!}(D_{xxzzz} - D_{yyzzz}) Y_5^{+2} + \frac{10}{7!!} D_{xyzzz} Y_5^{-2} + \frac{1}{3} D_{xzzzz} Y_5^{+1} +$$
$$+ \frac{1}{3} D_{yzzzz} Y_5^{-1} + D_{zzzzz} Y_5^0$$