Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1972

УДК 539.293 : 537.324

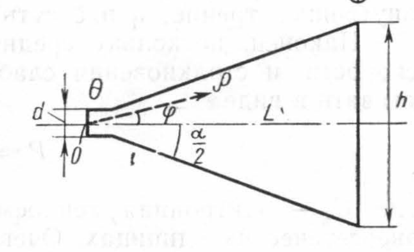
Я. Г. ПРОЙКОВА

БЕСПОЛЕВОЙ НАГРЕВ В СИСТЕМЕ С МЕЖДУЭЛЕКТРОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Развита теория бесполевого нагрева в приближении электронной температуры. Получены явные выражения для средней скорости, давления и температуры электронного газа в полупроводниковом образце с переменным сечением.

Введение

В работах [1, 2 и 3] была показана возможность бесполевого нагрева носителей заряда в пространственно-неоднородных системах. Конкретный расчет в этих работах, однако, проведен для случая, когда междуэлектронными столкновениями можно пренебречь. В настоящей работе находятся скорость, давление и температура в противоположном случае, когда справедливо приближение электронной температуры $\tau_e \ll \tau$, τ_p (где τ_e — время релаксации для электрон-электронных столкновений, а τ и τ_p — времена релаксации по энергии и по импульсу соответственно). Для этой цели исследуется стационарное движение носителей заряда в полупроводниковом образце, изображенном на рисунке. Здесь можно воспользоваться методами гидродинамики [4].



На поверхности h оптически инжектируются носители с интенсивностью g ($см^{-2} \cdot сек^{-1}$). Эти неравновесные носители дрейфуют к поверхности $d (d \ll h)$ под действием давления электронного газа (на поверхности h давление во много раз превышает давление на поверхности d) и под действием приложенного слабого электрического поля.

Будем использовать простую модель, полагая $w = p^2/2m$ (w и p — энергия и квазиимпульс электрона).

§ 1. Основные уравнения

Как известно, макроскопические уравнения переноса, выражающие законы сохранения числа частиц, импульса и энергии, получаются из кинетического уравнения Больцмана при заданной функции распределения, например, сдвинутой максвелловской. Они имеют вид

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial (nv_\alpha)}{\partial x_\alpha}=\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial t}+v_\alpha\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}=-\frac{1}{nm}\frac{\partial p}{\partial x_\beta}+\frac{F_\beta+\Gamma_\beta}{m}\frac{v_\beta}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c, \tag{2}$$

$$\frac{3}{2}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{3}{2}v_\alpha\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}=-\frac{3}{2}\left(T+\frac{mv^2}{3}\right)\frac{1}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c-$$
$$-\frac{1}{n}p\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}-P+\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right)-v_\alpha\Gamma_\alpha. \tag{3}$$

Здесь n и $\vec{v}$ — концентрация и средняя скорость частиц; T — температура в энергетических единицах; p — давление, связанное с n и T уравнением состояния $p=nT$; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности электронов; $\vec{F}$ — результирующая сила, действующая на электрон со стороны внешних полей. Слагаемые $\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c$, $\vec{\Gamma}$ и P появляются из-за столкновений частиц. Первое из них описывает исчезновение и появление электронов за счет процессов рекомбинации и генерации их в объеме полупроводника. Второе есть эффективная сила трения, возникающая из-за макроскопического движения; ее можно представить в виде

$$\vec{\Gamma}=-\frac{m\vec{v}}{\tau_p}+\eta\Delta\vec{V}+(\eta/3+\zeta)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{v}. \tag{4}$$

Первое слагаемое здесь обусловливает потери импульса при столкновении с решеткой; оно представляет собой так называемое внешнее трение. Второе и третье слагаемые одинаковой природы и описывают внутреннее трение; η и ζ суть коэффициенты вязкости ($\eta,\ \zeta>0$).

Наконец, поскольку средняя скорость v много меньше тепловой скорости и столкновения слабо неупругие, величину P можно представить в виде

$$P=\frac{C_e}{\tau}(T-T_L), \tag{5}$$

где C_e — электронная теплоемкость, а T_L — температура решетки в энергетических единицах. Очевидно, P_n есть мощность, выделяющаяся в единице объема за счет столкновений.

Далее, рассматривая стационарное движение в образце с сечением, изображенным на рисунке, выберем цилиндрические координаты ρ, φ, z с осью z вдоль линии пересечения заштрихованных плоскостей (точка 0) и углом φ, отсчитываемым указанным на рисунке образом $\left(-\frac{\alpha}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\alpha}{2}\right)$. Движение вдоль оси z однородно, и естественно искать решение вида $v_z=v_\varphi=0$, $v_\rho=v(\rho,\ \varphi)$ [1] (скорость дрейфа везде отрицательна).

Неизвестные n, v, T, F, p определяются тремя уравнениями переноса, уравнением [2, 4] и уравнением Пуассона. Однако, интересуясь бесполевым нагревом, мы можем считать полное электрическое поле

[1] В принципе возможны и другие моды с $v_z\neq0$, $v_\varphi\neq0$.

достаточно слабым, пренебрегая его влиянием на величины n и T, но учитывая его в формуле для тока. Как известно, эта аппроксимация может быть оправдана в условиях квазинейтральности, для чего в данном случае должно выполняться неравенство $l \gg l_D$ (здесь l — длина свободного пробега по энергии, l_D — дебаевская длина). Далее должно иметь место неравенство $\frac{eEL}{3T} \ll 1$.

Ограничимся также рассмотрением несжимаемого электронного газа. Условия справедливости этой аппроксимации имеют вид $\tau_c \gg \tau_м$, $l_c \gg l_D$, где $\tau_м$ — максвелловское время релаксации, а τ_c и l_c — характерное время возникновения неоднородности и характерная длина, на которой неоднородность успевает развиться.

Таким образом, уравнения (1), (2) и (3) с учетом (4) и (5) принимают вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v) = 0,$$

$$v\frac{\partial v}{\partial\rho} = -\frac{E}{m} - \frac{1}{nm}\frac{\partial p}{\partial\rho} - \frac{v}{\tau_p} + \frac{\eta}{m}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{v}{\rho^2}\right), \quad (6)$$

$$0 = -\frac{1}{nm}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + 2\frac{\eta}{m}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}, \quad (7)$$

$$0 = -\frac{1}{nm}\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{3}{2}v\frac{\partial T}{\partial\rho} = -\frac{c_e}{\tau}(T - T_2) - \frac{1}{n}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\varkappa\frac{\partial T}{\partial\rho}\right) -$$

$$-\frac{1}{n}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right) - \frac{mv^2}{\tau_p} - \eta v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{v}{\rho^2}\right). \quad (8)$$

Граничные условия к системе (6)—(8) суть условия на стенках при $\varphi = \pm\frac{\alpha}{2}$ для скорости и температуры, условия при $\rho = L$ для температуры и числа частиц, а также условие сохранения количества частиц. При наличии поверхностной рекомбинации граничное условие для нормальной компонентной средней скорости частиц должно иметь вид

$$v_\varphi/_{\varphi=\pm\alpha/2} = s_{1,2}. \quad (9)$$

Простоты ради будем считать скорость поверхностной рекомбинации достаточно малой, заменяя правую часть (11) нулем.

§ 2. Скорость и давление

Уравнение (6) дает

$$v(\rho, \varphi) = -\frac{u(\varphi)}{\rho}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (7) и (8), получим

$$\frac{\nu}{\rho^3}\frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{u^2}{\rho^3} - \frac{u}{\rho\tau_p} = -\frac{1}{nm}\frac{\partial p}{\partial\rho} - \frac{F}{m}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{nm}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \frac{2\nu}{\rho^2}\frac{du}{d\varphi} = 0. \quad (12)$$

Здесь введена кинематическая вязкость $\nu = \frac{\eta}{m}$.

Из уравнения (12) после интегрирования находим

$$\frac{1}{nm} p(\rho, \varphi) = -\frac{2\nu}{\rho^2} u(\varphi) + f(\rho). \tag{13}$$

Подставляя $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ из (14) в (11), получаем

$$\frac{\nu}{\rho^3} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \left(\frac{4\nu}{\rho^3} - \frac{1}{\rho \tau_p} \right) u = \frac{u^2}{\rho^3} - \frac{df}{d\rho} - \frac{F}{m}. \tag{14}$$

Если считать время τ_p слабо зависящим от энергии, то уравнение (15) можно решить точно в случае невязкого движения ($\nu=0$) и в случае большой вязкости. Поскольку $\nu \sim \frac{e_p^2}{3\tau_p}$, где l_p — длина свободного пробега по импульсу, слагаемое $\eta \Delta \vec{v}$ в силе трения существенно только при $l_c \ll l_p$, т. е. в очень коротких образцах. В дальнейшем будем считать $l_c \gg l_p$. Скорость и давление электронов в противоположном случае получаются аналогично [4].

Из (7) видно, что при $\nu=0$ давление зависит только от ρ и, следовательно, $u = \mathrm{const}$. Таким образом:

$$\frac{1}{nm}(p - p_0) = -\frac{u^2}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{L^2} \right) + \frac{u}{\tau_p} \ln \frac{\rho}{L} + \frac{F}{m}(L - \rho).$$

Здесь $p_0 = nT_L$ при $\rho = L$. Величина u определяется из условия, что через любое сечение $\rho = \mathrm{const}$ в единицу времени проходило одинаковое количество частиц. Это дает:

$$gh = n \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\alpha/2} u d\varphi, \text{ и, следовательно, } v = -\frac{gh}{\alpha n} \frac{1}{\rho}.$$

§ 3. Температура электронов

В условиях нашей аппроксимации коэффициент теплопроводности электронов $\varkappa$ зависит только от температуры, а через нее от координаты, и значит уравнение (8) нелинейно. Получим решение (8) для невязкого электронного газа, считая $\varkappa$ постоянным вдоль образца. При этом допускается ошибка, не превышающая 30% (см., например, [5]).

Далее, измеряя длину в единицах $\rho_0 = \sqrt{\frac{\varkappa \tau}{c_e n}}$, а $W = T - T_L$ в единицах T_L, получим безразмерное уравнение

$$\rho^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \left(1 + \frac{3u_0 n}{2\varkappa} \right) \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \rho^2 W = \frac{m u_0^2 n}{\tau_p \varkappa T_L}, \tag{15}$$

где

$$u_0 = \frac{gh}{\alpha n}.$$

В соответствии со сказанным в 1, граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}} = 0, \tag{16}$$

$T = T_L$ при $\rho = L$ [1] или, в безразмерных переменных

$$W = 0. \tag{17}$$

При $\rho \to 0$ решение должно быть регулярно.

Однородное уравнение (15) может быть решено разделением переменных. Накладывая граничное условие (17), получим $W(\rho, \varphi) = \mathrm{const}\, W(\rho)$. Тогда общее решение для $W(\rho)$ будет

$$W(\rho) = B_1\rho^{-\nu} I_\nu(\rho) + B_2\rho^{-\nu} K_\nu(\rho) +$$

$$+ \frac{mu_0^2 n}{\tau_p \varkappa T_L}\rho^{-\nu}\left\{K_\nu \int\limits_0^\rho \rho^{\nu+1} I_\nu d\rho + I_\nu \int\limits_\rho^L \rho^{\nu+1} K_\nu d\rho\right\}.$$

Здесь $\gamma = \frac{3u_0 n}{4\varkappa}$; $I_\nu(\rho)$, $K_\nu(\rho)$ — функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда.

Если длина образца L достаточно велика ($L \to \infty$), из граничных условий (17) с учетом поведения функции I_ν и K_ν при больших и малых ρ получим: $B_1 = B_2 = 0$. Тогда

$$W(\rho) = \frac{mu_0^2 n}{\varkappa \tau_p T_L}\rho^{-\nu}\left\{K_\nu \int\limits_0^\rho I_\nu \rho^{\nu+1} d\rho + I_\nu \int\limits_\rho^\infty \rho^{\nu+1} K_\nu d\rho\right\}. \tag{18}$$

При $\rho \to 0$ имеем

$$W/\rho \to 0 = \frac{m\varkappa}{n\tau_p}\frac{1}{T_L}\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{gh}{\alpha}\right)^2$$

или, в размерных единицах

$$T = T_L + \frac{m\varkappa}{n\tau_p}\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{gh}{\alpha}\right)^2. \tag{19}$$

Для In Sb при $T_L = 300$ °К, $\varkappa = 1{,}53 \cdot 10^8$ *см*$^{-1}$ · *сек*$^{-1}$ [5], $n \sim 10^{16}$ *см*$^{-3}$, нагрев ощутим: $T - T_L \sim 70$ °К для $g \sim 4 \cdot 10^{15}$ *см*$^{-2}$ · *сек*$^{-1}$, $h = 1$ *см* и $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

Заметим, что в рассматриваемых условиях между концами образца при разомкнутой цепи должно возникать напряжение — термоэдс горячих носителей.

В заключение выражаю искреннюю благодарность В. Л. Бонч-Бруевичу за предложенную тему и стимулирование работы, а также И. П. Звягину за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонч-Бруевич В. Л. «Физика и техника полупроводников», **3**, 1010, 1969.
2. Бонч-Бруевич В. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 5, 98, 1969; Phys stat. sol, **33**, 911, 1969.
3. Бонч-Бруевич В. Л., Пройкова Я. Г. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон. **11**, № 6, 1970.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
5. Busch G., Steigmeier E. Helv. Phys. Acta., **34**, 1, 1961.

Поступила в редакцию
3.3 1971 г.

Кафедра
полупроводников

[1] В частности, при оптической генерации температура носителей на поверхности h может отличаться от температуры T_L.