Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1972

УДК 531.18

М. К. БОГОСЛОВСКАЯ, Г. Ю. БОГОСЛОВСКИЙ

КОНЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРУППЫ РЕЛЯТИВИСТСКОГО КВАЗИОБМЕНА

Найдены конечные преобразования однопараметрической группы релятивистского квазиобмена. Элементами этой группы считаются такие преобразования относительных импульсов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ трех тождественных релятивистских частиц, которые оставляют инвариантным уравнение энергетической поверхности $E=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}+\sqrt{\vec{p}^2+4\vec{q}^2+4m^2}$ и элемент трехчастичного объема.

В работе [1] однопараметрическая группа

$$\vec{\tilde{q}}=\cos\varphi\vec{q}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\vec{p},\quad \vec{\tilde{p}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi\vec{q}+\cos\varphi\vec{p} \tag{1}$$

была названа группой квазиобмена в связи с тем, что ее частный элемент при значении параметра $\varphi=\pi/3$ давал, с точностью до несобственного преобразования $\vec{q}\to\vec{q}$, $\vec{p}\to-\vec{p}$, обмен 2-й и 3-й нерелятивистских частиц. Группа (1) оставляет инвариантной нерелятивистскую энергетическую поверхность

$$E=3m+\frac{\vec{q}^2}{m}+\frac{3\vec{p}^2}{4m} \tag{2}$$

и соответствующий элемент фазового объема $\delta(E-E')d\vec{p}d\vec{q}$. Задача настоящей работы состоит в том, чтобы получить однопараметрическую группу преобразований импульсов $\vec{q}$ и $\vec{p}$, которая обобщала бы на релятивистский случай группу квазиобмена (1).

С этой целью проинтегрируем найденные в [1] уравнения инфинитезимальных преобразований такой группы. Эти уравнения имеют вид

$$d\vec{q}=\frac{c(e)}{2E^2}\varepsilon\vec{p}d\varphi,\quad d\vec{p}=-\frac{c(e)}{E^4}\varepsilon(E^2+m^2-\varepsilon^2)\vec{q}d\varphi, \tag{3}$$

где

$$c(e)=-\frac{4E^3K(k)}{\pi\sqrt{t_0(t_1-t_3)}}, \tag{4}$$

$K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода от

$$k = \sqrt{\frac{t_1 (t_0 - t_3)}{t_0 (t_1 - t_3)}}, \tag{5}$$

$t_3 < t_0 < t_1$ — корни кубического уравнения $t (t - E^2 - 3m^2)^2 - 16E^2 e = 0$, $e = \frac{\varepsilon^2}{16E^2} (\varepsilon^2 - E^2 - 3m^2)^2 - (\vec{q}\vec{p})^2$ — инвариант системы (3), $\varepsilon = 2\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$ и

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}^2 + 4\vec{q}^2 + 4m^2} \tag{6}$$

уравнение релятивистской энергетической поверхности.

Общее решение системы шести дифференциальных уравнений первого порядка (3) определяется, как известно, шестью постоянными $\vec{q}_0$, $\vec{p}_0$ задающими начальные значения $\vec{q}$ и $\vec{p}$. Поскольку в силу (3)

$$\frac{d\,[\vec{p}\,\vec{q}]}{d\varphi} = 0, \tag{7}$$

общее решение системы (3) можно искать в виде

$$\vec{q} = f_1^q (\varphi)\, \vec{q}_0 + f_1^p (\varphi)\, \vec{p}_0, \quad \vec{p} = f_2^q (\varphi)\, \vec{q}_0 + f_2^p (\varphi)\, \vec{p}_0 \tag{8}$$

с начальными условиями $f_1^q (0) = 1$, $f_1^p (0) = 0$, $f_2^q (0) = 0$, $f_2^p (0) = 1$.

Продифференцировав уравнения (3) по φ и учитывая, что

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{2c\,(e)}{E^2} (\vec{q}\vec{p}), \tag{9}$$

получим систему нелинейных уравнений второго порядка, эквивалентную (3):

$$\frac{d^2\vec{q}}{d\varphi^2} - \frac{2c\,(e)\,(\vec{q}\,\vec{p})}{E^2 \varepsilon} \frac{d\vec{q}}{d\varphi} + \frac{c^2 (e)\, \varepsilon^2 (E^2 - \varepsilon^2 + m^2)}{2E^6} \vec{q} = 0,$$

$$\frac{d^2\vec{p}}{d\varphi^2} - \frac{2c\,(e)\,(E^2 - 3\varepsilon^2 + m^2)\,(\vec{q}\,\vec{p})}{E^2 (E^2 - \varepsilon^2 + m^2)\, \varepsilon} \frac{d\vec{p}}{d\varphi} + \frac{c^2 (e)\, \varepsilon^2 (E^2 - \varepsilon^2 + m^2)}{2E^6} \vec{p} = 0. \tag{10}$$

В работе [1] найдено решение уравнения (9) с начальными значениями $\varepsilon^2 (0) = t_0$, $(\vec{q}_0\vec{p}_0) = 0$:

$$\varepsilon (\varphi) = \frac{\sqrt{t_0 t_1}\, \mathrm{dn} \left(\frac{2K}{\pi} \varphi; k \right)}{\sqrt{t_1 - t_0 + t_0\, \mathrm{dn}^2 \left(\frac{2K}{\pi} \varphi; k \right)}}, \tag{11}$$

$$(\vec{q}\vec{p}) = \frac{t_1^{3/2} (t_0 - t_3)(t_1 - t_0)\, \mathrm{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \varphi; k \right) \mathrm{cn} \left(\frac{2K}{\pi} \varphi; k \right)}{4E\,(t_1 - t_3)^{1/2} \left[t_1 - t_0 + t_0\, \mathrm{dn}^2 \left(\frac{2K}{\pi} \varphi; k \right) \right]^{3/2}}, \tag{12}$$

где sn, cn, dn — эллиптические функции Якоби [2].

Таким образом, если начальные значения $\vec{q}_0$ и $\vec{p}_0$ удовлетворяют условиям

$$\vec{q}_0^{\,2} = \frac{t_0 - 4m^2}{4}, \quad \vec{p}_0^{\,2} = \frac{\lambda\,(E^2, t_0, m^2)}{4E^2}, \quad (\vec{q}_0\vec{p}_0) = 0, \tag{13}$$

где $\lambda(a, b, c)=a^2+b^2+c^2-2(ab+ac+bc)$, то коэффициенты в уравнениях (10) становятся в силу (11) и (12) известными функциями от φ.

Подставляя соответствующие начальным значениям (13), разложения (8) в систему (10), заключаем, что $f_1^q(\varphi)$ и $f_1^p(\varphi)$ могут быть найдены как два линейно независимых решения уравнения

$$\frac{d^2 f_1}{d\varphi^2}+u_1(\varphi)\frac{df_1}{d\varphi}+v_1(\varphi) f_1=0, \tag{14}$$

а $f_2^q(\varphi)$ и $f_2^p(\varphi)$ — как два линейно независимых решения уравнения

$$\frac{d^2 f_2}{d\varphi^2}+u_2(\varphi)\frac{df_2}{d\varphi}+v_2(\varphi) f_2=0, \tag{15}$$

где

$$u_1(\varphi)=-\frac{2c(e)(\vec{q}\,\vec{p})}{E^2\varepsilon}, \quad v_1(\varphi)=\frac{c^2(e)\,\varepsilon^2(E^2-\varepsilon^2+m^2)}{2E^6}, \tag{16}$$

$$u_2(\varphi)=-\frac{2c(e)(E^2-3\varepsilon^2+m^2)(\vec{q}\vec{p})}{E^2(E^2-\varepsilon^2+m^2)\,\varepsilon}, \quad v_2(\varphi)=v_1(\varphi), \tag{17}$$

а ε и $(\vec{q}\vec{p})$ — однозначные функции (11) и (12) от φ. Хотя f_1^q, f_1^p, f_2^q, f_2^p являются линейно независимыми, но функционально они связаны друг с другом. Действительно, выразим, используя (8) и (13), скалярное произведение $(\vec{q}\,\vec{p})$ через f_1^q, f_1^p, f_2^q, f_2^p. Получим

$$f_1^q f_2^q \vec{q}_0^{\,2}+f_1^p f_2^p \vec{p}_0^{\,2}=(\vec{q}\vec{p}). \tag{18}$$

Здесь и в дальнейшем мы опустили для краткости аргумент φ у функций f. Поскольку правая часть (18) есть известная функция (12), то соотношение (18) дает нам первую функциональную связь величин f.

Поступая аналогично и используя формулы

$$\vec{q}^{\,2}=\frac{\varepsilon^2-4m^2}{4}, \quad \vec{p}^{\,2}=\frac{\lambda(E^2, \varepsilon^2, m^2)}{4E^2}, \tag{19}$$

получаем еще два функциональных соотношения

$$f_1^{q^2}\vec{q}_0^{\,2}+f_1^{p^2}\vec{p}_0^{\,2}=\frac{\varepsilon^2-4m^2}{4}, \tag{20}$$

$$f_2^{q^2}\vec{q}_0^{\,2}+f_2^{p^2}\vec{p}_0^{\,2}=\frac{\lambda(E^2, \varepsilon^2, m^2)}{4E^2}. \tag{21}$$

Правые части (20) и (21) однозначно определяются формулой (11). Четвертое соотношение выводится следующим образом. Воспользуемся тем, что $[\vec{p}\vec{q}]^2$ является инвариантом вследствие (7). Тогда, имея в виду (13), можно написать

$$q^2p^2-(\vec{q}\vec{p})^2=q_0^2p_0^2. \tag{22}$$

Подставляя сюда (20), (21) и (18), получаем

$$f_1^q f_2^p-f_2^q f_1^p=1. \tag{23}$$

Соотношения (18), (20), (21), (23) позволяют явно выразить f_2^q, f_1^p, f_2^p через f_1^q и известные функции ε^2 и $(\vec{q}\vec{p})$.

$$f_1^p = -\frac{E}{\sqrt{\lambda(E^2, t_0, m^2)}} \sqrt{\varepsilon^2 - 4m^2 - (t_0 - 4m^2) f_1^{q^2}}, \tag{24}$$

$$f_2^p = \frac{1}{\sqrt{\lambda(E^2, t_0, m^2)}} \sqrt{\lambda(E^2, \varepsilon^2, m^2) - E^2 (t_0 - 4m^2) f_2^{q^2}}, \tag{25}$$

$$f_2^q = \frac{1}{\varepsilon^2 - 4m^2} \left[4 (\vec{q}\vec{p}) f_1^q + \frac{\sqrt{\lambda(E^2, t_0, m^2)}}{E} \sqrt{\varepsilon^2 - 4m^2 - (t_0 - 4m^2) f_1^{q^2}} \right]. \tag{26}$$

Вернемся к уравнению (14). Напишем определитель Вронского для двух линейно независимых решений уравнения (14)

$$W(\varphi) = f_1^q \frac{df_1^p}{d\varphi} - f_1^p \frac{df_1^q}{d\varphi}. \tag{27}$$

По формуле Остроградского — Лиувилля [3]

$$W(\varphi) = W(0)\, e^{-\int\limits_0^\varphi u_1(\varphi) d\varphi}. \tag{28}$$

Интеграл, входящий в (28), можно вычислить явно, если воспользоваться соотношениями (16) и (9). Тогда

$$W(\varphi) = W(0) \frac{\varepsilon}{\sqrt{t_0}}, \tag{29}$$

где ε определяется формулой (11).

Нам остается определить $W(0)$. Так как $f_1^p(0) = 0$, а $f_1^q(0) = 1$, то из (27) следует, что

$$W(0) = \left.\frac{df_1^p}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}. \tag{30}$$

Далее из (8) имеем

$$\left.\frac{d\vec{q}}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{df_1^q}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} \vec{q}_0 + \left.\frac{df_1^p}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} \vec{p}_0, \tag{31}$$

из (20), (9) и (13) —

$$\left.\frac{d\varepsilon^2}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = 8 \left(\vec{q}_0^{\,2} f_1^q \frac{df_1^q}{d\varphi} + \vec{p}_0^{\,2} f_1^p \frac{df_1^p}{d\varphi} \right)\Bigg|_{\varphi=0} = 0; \tag{32}$$

а так как $f_1^p(0) = 0$ и $f_1^q(0) = 1$, то $\left.\frac{df_1^q}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = 0$ и из (31) следует, что

$$\left.\frac{d\vec{q}}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \vec{p}_0 \left.\frac{df_1^p}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}. \tag{33}$$

Но основные уравнения (3) дают

$$\left.\frac{d\vec{q}}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \vec{p}_0 \frac{c(e)}{2E^2} \varepsilon \Big|_{\varphi=0} = t_0^{1/2} \frac{c(e)}{2E^2} \vec{p}_0. \tag{34}$$

Таким образом, с помощью (29), (30), (33) и (34) окончательно находим определитель Вронского в виде явной функции от φ

$$W(\varphi) = \frac{c(e)}{2E^2} \varepsilon(\varphi). \tag{35}$$

Если продифференцировать соотношение (20) по φ, то в добавление к уравнению (27) мы получим еще одно уравнение, связывающее функции f_1 и их производные

$$(t_0 - 4m^2)\, f_1^q \frac{df_1^q}{d\varphi} + \frac{\lambda(E^2, t_0, m^2)}{E^2} f_1^p \frac{df_1^p}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d\varepsilon^2}{d\varphi}. \tag{36}$$

Разрешая систему (27), (36) относительно $\frac{df_1^q}{d\varphi}$ и используя выражение (24), заключаем, что f_1^q удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{df_1^q}{d\varphi} = \frac{\sqrt{\lambda(E^2, t_0, m^2)}}{E}\,\frac{W(\varphi)}{(\varepsilon^2 - 4m^2)}\sqrt{\varepsilon^2 - 4m^2 - (t_0 - 4m^2)\, f_1^{q^2}} + f_1^q \frac{d\ln\sqrt{\varepsilon^2 - 4m^2}}{d\varphi}, \tag{37}$$

которое с помощью (35) и замены

$$\frac{f_1^q}{\sqrt{\varepsilon^2 - 4m^2}} = y \tag{38}$$

превращается в уравнение с разделяющимися переменными

$$-\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{t_0 - 4m^2} - y^2}} = -\frac{c(e)\sqrt{(t_0 - 4m^2)\,\lambda(E^2, t_0, m^2)}}{2E^3}\,\frac{\varepsilon d\varphi}{(\varepsilon^2 - 4m^2)}. \tag{39}$$

Имея в виду начальное условие $f_1^q(0) = 1$, интегрируем (39) с начальным условием $y(0) = 1/\sqrt{t_0 - 4m^2}$.

Окончательно, используя формулы (38), (24) — (26), находим

$$f_1^q = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 4m^2}{t_0 - 4m^2}}\cos\alpha(\varphi), \tag{40}$$

$$f_1^p = -E\sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 4m^2}{\lambda(E^2, t_0, m^2)}}\sin\alpha(\varphi), \tag{41}$$

$$f_2^q = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{\lambda(E^2, t_0, m^2)}{\varepsilon^2 - 4m^2}}\left[\sin\alpha(\varphi) + \frac{4E(\vec{q}\,\vec{p})}{\sqrt{(t_0 - 4m^2)\,\lambda(E^2, t_0, m^2)}}\cos\alpha(\varphi)\right], \tag{42}$$

$$f_2^p = \sqrt{\frac{t_0 - 4m^2}{\varepsilon^2 - 4m^2}}\left[\cos\alpha(\varphi) - \frac{4E(\vec{q}\,\vec{p})}{\sqrt{(t_0 - 4m^2)\,\lambda(E^2, t_0, m^2)}}\sin\alpha(\varphi)\right], \tag{43}$$

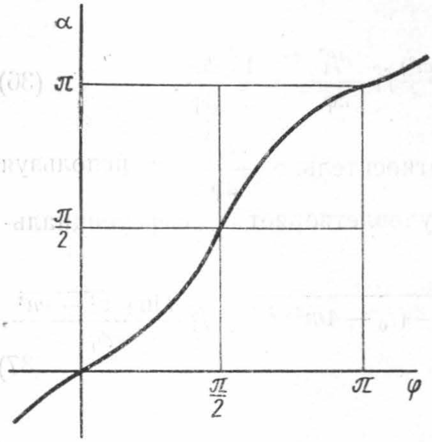
где в силу (4)

$$\alpha(\varphi) = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{(t_0 - 4m^2)\,\lambda(E^2, t_0, m^2)}{t_0(t_1 - t_3)}}\int_0^{\varphi}\frac{\varepsilon d\varphi}{\varepsilon^2 - 4m^2}. \tag{44}$$

Подынтегральная функция в (44) периодична с периодом π. Из формулы (44), (40) — (43), (11), (12) следует замечательное свойство функции $\alpha(\varphi)$:

$$\alpha\left(n\frac{\pi}{2}\right) = n\frac{\pi}{2},\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \tag{45}$$

независимо от значения параметров; так что $\alpha(\varphi)$ может быть названа квазипериодической функцией. Общий ход $\alpha(\varphi)$ показан на рисунке.



В нерелятивистском пределе $\alpha(\varphi)$ становится линейной функцией $\alpha(\varphi)=\varphi$.

Теперь, после того как мы получили решение системы (3) для начальных значений (13) не представляет труда написать ее решение в случае произвольных начальных значений $\vec{q}$ и $\vec{p}$. Это решение и будет давать конечные преобразования группы релятивистского квазиобмена

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{q}}(\tilde{\varphi}) &= [f_1^q(\tilde{\varphi}+\varphi) f_2^p(\varphi) - f_1^p(\tilde{\varphi}+\varphi) f_2^q(\varphi)]\vec{q} + \\ &+ [f_1^p(\tilde{\varphi}+\varphi) f_1^q(\varphi) - f_1^q(\tilde{\varphi}+\varphi) f_1^p(\varphi)]\vec{p}, \\ \vec{\tilde{p}}(\tilde{\varphi}) &= [f_2^q(\tilde{\varphi}+\varphi) f_2^p(\varphi) - f_2^p(\tilde{\varphi}+\varphi) f_2^q(\varphi)]\vec{q} + \\ &+ [f_2^p(\tilde{\varphi}+\varphi) f_1^q(\varphi) - f_2^q(\tilde{\varphi}+\varphi) f_1^p(\varphi)]\vec{p}\end{aligned} \tag{46}$$

где $\tilde{\varphi}$ — параметр группы, а φ определяет начальные значения $\vec{q}$, $\vec{p}$ через начальные значения (13). В нерелятивистском случае преобразования (46) переходят в (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Богословский Г. Ю. ТМФ 8.
2. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Курс современного анализа, ч. II. М., Физматгиз, 1963.
3. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию
3.3 1971 г.

НИИЯФ