Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 2 — 1972

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 551.466.31

В. А. КРАСИЛЬНИКОВ, В. И. ПАВЛОВ

РЕЛАКСАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ С КАПИЛЛЯРНЫМИ ВОЛНАМИ

Влияние поверхностного натяжения на распространение гравитационных волн может оказаться весьма существенным. Если число взаимодействующих волн велико, то при выполнении определенных условий [1] можно использовать статистический подход. В этом случае для квадрата модуля фурье-компонента возмущенной поверхности жидкости N_k может быть получено кинетическое уравнение типа Фоккера—Планка. Если деформация поверхности мала, но конечна, т. е. $\varepsilon = |\overline{\nabla} \xi| \ll 1$, то выражение для полной энергии волнового движения можно разложить в ряд по этому параметру. Ограничимся только членами до третьего порядка малости включительно. В этом случае кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \int \frac{d\bar{k}_1}{(2\pi)^2} |V|^2 \{2 [N_{k_1} N_{k_2} + N_k N_{k_2} - N_k N_{k_1}] \times \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2) -$$

$$- [N_k N_{k_1} + N_k N_{k_2} - N_{k_1} N_{k_2}] \, \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)\}, \tag{1}$$

$$V = \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{c_1 c_2}{c} \right)^{1/2} (\bar{k}_1 \bar{k}_2 + k_1 k_2) + \left(\frac{c c_1}{c_2} \right)^{1/2} (\bar{k}_2 \bar{k} + \bar{k}_2 \bar{k}) + \left(\frac{c_2 c}{c_1} \right)_1^{1/2} \times (-\bar{k} \bar{k}_1 + k k_1). \right. \tag{2}$$

где k_i — модуль волнового вектора, $\bar{k_i}$ и c_i — скорость волны с длиной $2\pi/k_i$.

Особенности резонансных условий для трех взаимодействующих поверхностных волн (2) позволяют существенно упростить исходное уравнение. Если k достаточно мало, то можно записать

$$k_2 = (k^2 + k_1^2 + 2k_1 k \cos\theta)^{1/2} \simeq k_1 + k \cos\theta.$$

Тогда из сохранения частот следует, что

$$k_m k^{1/2} + k^{3/2} = (k + k\cos\theta)^{3/2},$$

или

$$k_1 = \frac{4}{9} \frac{k_m^2}{k} \frac{1}{\cos^2\theta}. \tag{3}$$

Очевидно, $k_{1\min} = \dfrac{4k_m^2}{9k} \gg k_m$, если $k \ll k_m$. Нетрудно заметить, что в первом слагаемом уравнения (1) при заданном k интегрирование ведется от $k_{1\min}$ до $+\infty$. Во втором слагаемом при заданном k область возможных значений k_1 ограничена, причем, при $k \ll k_m$ эта область стягивается в точку и затем исчезает. Таким образом, когда состояние k принадлежит низкочастотной части спектра $\left(k^2 \ll \dfrac{g}{\sigma}, \right.$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, g — ускорение силы тяжести), то в кинетическом уравнении можно опустить последнее слагаемое, а оставшийся член привести к виду

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = N_k \left\{ \int \frac{d\bar{k}_1}{(2\pi)^2} |V|^2 \omega \frac{\partial N_{k1}}{\partial \omega_1} \delta\left(\omega - \frac{\partial \omega_1}{\partial k_1} k \cos\theta\right) \right\} +$$

$$+ \int \frac{d\bar{k}_1}{(2\pi)^2} |V|^2 N^2_{k_1} \delta\left(\omega - \frac{\partial \omega_1}{\partial k_1} k \cos\theta\right). \tag{4}$$

Если нелинейность не слишком велика, то влияние высокочастотной части спектра на низкочастотную пренебрежимо мало, практически перекачку энергии из гравитационной области в капиллярную, описываемую уравнением (4), можно считать необратимой.

Предположим для простоты, что количество поступающей в капиллярную область энергии полностью поглощается, т. е. $\frac{\partial N_{k_1}}{\partial t} = 0$. Тогда очевидно, что характерное время релаксации гравитационных волн определяется из уравнения (4):

$$\frac{1}{\tau_k} = -\int \frac{dk_1}{(2\pi)^2} |V|^2 \omega \frac{\partial N_1 k_1}{\partial \omega_1} \delta\left(\omega - \frac{\partial \omega_1}{\partial k_1} k \cos\theta\right). \tag{5}$$

Необходимо связать N_k с наблюдаемыми величинами. Непосредственно из фурье-представления видно, что среднее по начальным случайным фазам от $(\nabla \xi)^2$ будет

$$\langle \nabla \xi^2 \rangle = \int \frac{d\bar{k}_1}{(2\pi)^2} k_1^2 \left(\frac{k_1}{\omega_1}\right) N_{k_1}, \quad N_{k_1} \equiv \langle a_{k_1} a_{k_1^*} \rangle. \tag{6}$$

Экспериментальные и теоретические исследования [3, 4], полученные при излучении установившегося волнения, свидетельствуют о том, что, за исключением очень малых частот, спектр имеет степенной вид $N_k \sim k^{-s}$. Поэтому из (6) получаем

$$N_{k_1} \cong 2\pi g^{1/2} k_m^{-9/2} \langle \varepsilon^2 \rangle \left(\frac{k_1}{k_m}\right)^S \left(\frac{k_m}{k_*}\right), \tag{7}$$

где k_* нижняя граница спектра.

Таким образом, для времени релаксации гравитационной волны получаем следующее выражение:

$$\frac{1}{\tau_k} \cong 10^{-3} \omega_m^2 \langle \varepsilon^2 \rangle \left\{\frac{k_{\min}}{k_m}\right\}^{s+\frac{9}{2}} \frac{1}{\omega} \int\limits_1^\infty dx \frac{x^{10+2s}}{\sqrt{x^2-1}}, \tag{8}$$

Рассмотрим критерии применимости полученного выражения, которое справедливо только в том случае, когда $\omega < \omega_m$. Необходимо учесть, что теория резонансного взаимодействия справедлива до тех пор, пока «риплоны» в K-состоянии живут достаточно долго. По крайней мере необходимо выполнение неравенства $\omega\tau_{\text{кап}} \gg 1$. Это обусловлено тем, что неопределенность по частоте для капиллярных мод, с которыми взаимодействует гравитационная волна, пропорциональна $\Delta\omega \sim 1/\tau_{\text{кап}}$, где $\tau_{\text{кап}}$ — время жизни капиллярной волны. Гравитационная волна взаимодействует с отдельной капиллярной волной только в том случае, когда $\omega \gg \Delta\omega \sim \frac{1}{\tau_{\text{кап}}}$ или $\omega\tau_{\text{кап}} \gg 1$. Характерное время жизни капиллярных мод определяется вязкостью, т. е. $\tau_{\text{кап}}^{-1} \sim \nu k_1^2$. Поэтому мы можем записать $\omega\tau_{\text{кап}} \sim 10^{-6}\ \omega^5$, откуда следует, что рассмотренная теория справедлива лишь в высокочастотной части гравитационного спектра. Если условие $\omega\tau_{\text{кап}} \gg 1$ не выполняется, то нельзя использовать уравнение (1).

Зная выражение для полной энергии возмущенной поверхности жидкости, можно получить уравнения для амплитуд [5]. Соответствующие уравнения для $N_k \equiv \langle a_k a_k^* \rangle$ можно получить из уравнений для амплитуд усреднением по фазам, т. е.

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \int \frac{d\bar{k}}{(2\pi)^2} V \langle a_k^* a_{k_1}^* a_{k_1-k} \rangle e^{-(\omega+\omega_1-\omega_2)t} + \text{к. с.} \tag{9}$$

Если считать фазы хаотическими, а амплитуды совершенно не коррелированными, то в правой части этого уравнения мы получим просто нуль. Но малая корреляция все же существует в силу нелинейности уравнения для амплитуд. Представляя a_k в виде $a_k^{(0)} + \delta a_k$, где δa_k — малая добавка, учитывающая корреляцию амплитуд, можно получить уравнение для δa_k в первом приближении [6].

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta a_k = \int \frac{d\bar{k}_1}{(2\pi)^2} V a_{k_1}^{*(0)} a_{k_2}^{*(0)} e^{-i(\omega+\omega_1-\omega_2)t} + \text{к. с.} \tag{10}$$

Проинтегрировав это уравнение по времени от 0 до $+\infty$, в предположении, что при $t \to \infty$ корреляция ослабевает,

$$\delta a_k = \int \frac{d\bar{k}_1}{(2\pi)^2} V a_{k_1}^{*(0)} a_{k_2}^{(0)} \pi\delta(\omega + \omega_1 - \omega_2). \tag{11}$$

При $\omega\tau_{\text{кап}} \gg 1$, т. е. в предположении, что система трех взаимодействующих волн существует бесконечно долго, мы получаем дельта-функцию. В противоположном предельном случае, когда $\omega\tau_{\text{кап}} \ll 1$, вместо дельта-функции получаем множитель $\tau_{\text{кап}}/\pi$. Дальнейший вывод кинетического уравнения несложен, надо подставить (11) в уравнение (9), сохранив только члены четвертого порядка малости по амплитуде, и расщепить четверные произведения. Таким образом, в случае $\omega\tau_{\text{кап}} < 1$ время релаксации K-состояния определяется выражением

$$\frac{1}{\tau_k} \simeq -\frac{2}{\pi} \int \frac{d\bar{k}_1}{(2\pi)^2} |V|^2 \omega \frac{\partial N_1}{\partial \omega_1} \tau_{\text{кап}}(k_1). \tag{12}$$

Несложные, но громоздкие вычисления интеграла позволяют записать

$$\frac{1}{\tau_k} \sim 10^{-2} \frac{\sigma k \varphi(k_m/k_*)}{\nu} \langle \varepsilon^2 \rangle. \tag{13}$$

Если учесть, что показатель s, имеет порядок $-4\frac{1}{2}$, то мы получаем

$$\frac{1}{\tau_k} \sim \frac{6}{\Lambda} \langle \varepsilon^2 \rangle. \tag{14}$$

Мы предполагаем, что и в капиллярной области спектра показатель s имеет то же значение, что и в гравитационной области.

Сделаем некоторые численные оценки. Время релаксации волны, например, с периодом $T = 1{,}7$ *сек* и средним наклоном $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1{,}4 \cdot 10^{-1}$, составляет около пяти часов. В то же время τ_ν, обусловленное вязкостью, дает $\tau = 150$ *час*. Если воспользоваться выражением (14), то оно показывает, что время релаксации, обусловленное нелинейными процессами, составляет для этой же волны $\tau_k \sim 10^3$ *сек*, что довольно близко к наблюдаемому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. ЖЭТФ, **52**, 1081, 1967.
2. Mc. Goldrick L. F. J. Fluid. Mech., **21**, 305, 1965.
3. Стрекалов С. С. «Океанология», **1**, вып. 3, 1961.
4. Phillips O. M. Proc. of Conf. Ocean Wave Speetra, USA, p. 171, 1961.
5. Захаров В. Е. «Журн. Прикладной математики и теоретической физики», **2**, 86, 1968.
6. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. УФН, **103**, 193, 1971.

Поступила в редакцию
30.3 1971 г.

Кафедра
акустики