УДК 534.0

В. М. ВОЛОСОВ, Б. И. МОРГУНОВ

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ

При изучении колебаний механических систем возникает необходимость учитывать рассеяние энергии, которое всегда имеет место в реальных колебательных системах. Мерой рассеяния энергии в материале может служить площадь петли гистерезиса в координатах перемещение — сила. Для ряда материалов характерно следующее свойство: энергия, рассеиваемая за один период колебаний, зависит только от амплитуды перемещений [1—4]. Кроме того, во многих практически важных случаях можно считать эту энергию относительно малой величиной.

Изучению колебательных систем с учетом внутреннего трения посвящено большое число работ [1—6]. Для анализа квазилинейных колебательных систем с успехом применяются асимптотические методы, являющиеся развитием метода Крылова—Боголюбова. В настоящей заметке излагается методика осреднения, позволяющая рассчитывать колебательные режимы существенно нелинейных систем с одной степенью свободы с учетом потерь энергии в материале в предположении, что площадь петли гистерезиса является малой величиной, пропорциональной малому параметру $0<\varepsilon\ll 1$.

Пусть нелинейная колебательная система с одной степенью свободы описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y})+Q(y)=\varepsilon\Phi(F_1,\ F_2,\ y,\ \dot{y})+\varepsilon f\ (y,\ \dot{y}). \tag{1}$$

Здесь m — масса, $Q-\varepsilon\Phi$ — возвращающая сила (слагаемое — $\varepsilon\Phi$ учитывает гистерезисные потери), εf — малое нелинейное возмущение, F_1 и F_2 — амплитудные значения координаты y $(F_2\leqslant y\leqslant F_1)$, которые выражаются через y и $\dot{y}$ с помощью интегралов невозмущенной системы (системы (1) при $\varepsilon=0$) [7—10]. Мы не делаем здесь допущений о форме петли гистерезиса [1—4], т. е. не приводим конкретного вида функции Φ. Функция f может также периодически зависеть от времени t. В этом случае удобно взять возмущение в виде $\varepsilon f\ (y,\ \dot{y},\ \vartheta)$, где $\dot{\vartheta}=\nu+\varepsilon\Theta(y,\ \dot{y},\ \vartheta)$ (ϑ — фаза внешних возмущений), f и Θ периодичны по ϑ с периодом 2π. Аналогично может быть рассмотрен случай, когда параметры системы медленно изменяются со временем (при этом функции в (1) зависят от некоторых переменных $x=\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$, причем $\dot{x}=\varepsilon X(x,\ y,\ \dot{y})$).

Для того чтобы приближенно проинтегрировать систему (1), следует перейти от переменных y и $\dot{y}$ к новым переменным — амплитудным кривым F_1, F_2 и фазе колебаний ψ [7, 8]. Это преобразование проводится с помощью интегралов невозмущенной системы и приводит систему (1) к виду

$$\dot{F}_1+\varepsilon A(F_1,\ F_2,\ y,\ \dot{y}),\ \ \dot{\psi}=\omega(F_1,\ F_2)+\varepsilon\Psi(F_1,\ F_2,\ y,\ \dot{y}), \tag{2}$$

где A, ω, Ψ — некоторые известные функции, вычисляемые по методике, развитой в [7, 8]. Амплитуды F_1 и F_2 связаны соотношением $\int\limits_{F_1}^{F_2}Q(y)\,dy=0$. Сходным образом преобразуется (1) и в неавтономном случае, когда f периодически зависит от t [9, 10]. К преобразованным системам типа (2) может быть применена методика осреднения [7—10].

Приведем пример расчета конкретной нелинейной колебательной системы с одной степенью свободы с учетом потерь энергии в материале. Рассмотрим массу m, перемещающуюся по горизонтальной направляющей под действием вертикальной пружины с жесткостью k^2 и длиной l при условии, что, когда тело находится под точкой подвеса пружины, последняя недеформирована [7, 8]. Колебания такой системы описываются следующим уравнением, в котором удержаны члены до третьего порядка включительно:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y})+\frac{k^2}{2l^2}y^3=\varepsilon bF^n\left(1-\frac{y^2}{2F^2}\right)\operatorname{sgn}\dot{y}+\varepsilon\lambda\dot{y}. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon\lambda$ — малый коэффициент трения, член $\varepsilon bF^n\left(1-\frac{y^2}{2F^2}\right)\operatorname{sgn}\dot{y}$ учитывает энергетические потери [1—4], n — некоторая постоянная. Допустим, что m, k, b зависят от «медленного времени» $\tau=\varepsilon t$. Амплитуды колебаний $F=F_1$ и F_2 в данном случае связаны соотношением $F=F_1=-F_2$.

Осредненное уравнение первого приближения по ε для амплитудной кривой $\bar{F}(\varepsilon t)$ имеет вид [7, 8]

$$\frac{d\bar{F}}{d\tau}+\left(\frac{1}{3k\sqrt{m}}\frac{dk\sqrt{m}}{d\tau}-\frac{\lambda}{3m}\right)\bar{F}=\frac{5}{9}\frac{lb}{\alpha k\sqrt{m}}\bar{F}^{n-1}, \tag{4}$$

где $\alpha=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\Gamma^2(^1/_4)$ (Γ — гамма — функция Эйлера). Решая (4), получим

$$\bar{F}(\tau)=\left(\frac{k\sqrt{m}}{k(0)\sqrt{m(0)}}\right)^{-1/3}e^{\frac{1}{3}\int_0^\tau\frac{\lambda}{m}d\tau}\left[\bar{F}^{2-n}(0)-\frac{5l(n-2)}{9\alpha}\times\right.$$

$$\left.\times\left(k(0)\sqrt{m(0)}\right)^{\frac{n-2}{3}}\int_0^\tau b\left(k\sqrt{m}\right)^{-\frac{n+1}{3}}e^{\frac{n+2}{3}\int_0^\tau\frac{\lambda}{m}d\tau}d\tau\right]^{\frac{1}{2-n}}.$$

Пусть $m=\mathrm{const}$, $k=\mathrm{const}$, $b=\mathrm{const}$, $\lambda=\mathrm{const}$. Тогда для $\bar{F}$ получается выражение

$$\bar{F}(\tau)=e^{\frac{\lambda\tau}{3m}}\left[\bar{F}^{2-n}(0)-\frac{5l\sqrt{m}}{3\alpha\lambda k}\left(e^{\frac{(n-2)\lambda\tau}{3m}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2-n}}.$$

Рассмотрим для этого случая периодические автоколебательные режимы системы (3). Амплитуда F_0, соответствующая автоколебательному режиму [7], дается выражением

$$F_0=\left(-\frac{\lambda k\Gamma^2(^1/_4)}{10lb\sqrt{2\pi m}}\right)^{\frac{1}{n-2}}. \tag{5}$$

Автоколебательный режим с амплитудой (5) устойчив при условии $n>2$. Для периода этого режима T_0 справедливо приближенное выражение

$$T_0=\frac{2l}{k}\sqrt{\frac{m}{2\pi}}\,\Gamma^2(^1/_4)\left(-\frac{\lambda k\Gamma^2(^1/_4)}{10lb\sqrt{2\pi m}}\right)^{\frac{1}{2-n}}. \tag{6}$$

Поправки первого порядка по ε $\varepsilon\Delta F$ и $\varepsilon\Delta T$ к амплитуде (5) и периоду (6) в данном случае равны нулю. Приближенная формула для периодического решения (3) имеет вид

$$y=F_0cn\left[\frac{kF^0}{l\sqrt{2}}(t+h)\right],$$

где h — произвольная постоянная, cn — эллиптическая функция Якоби при модуле $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим резонансные режимы системы типа (3). Уравнение движения возьмем в виде

$$m\ddot{y}+\frac{k^2}{2l^2}y^3=\varepsilon bF^n\left(1-\frac{y^2}{2F^2}\right)\operatorname{sgn}\dot{y}+\varepsilon\lambda\dot{y}+\varepsilon a\cos\nu t, \tag{7}$$

где $m=\mathrm{const}$, $k=\mathrm{const}$, $l=\mathrm{const}$, $b=\mathrm{const}$, $\lambda=\mathrm{const}$, $a=\mathrm{const}$, $\nu=\mathrm{const}$.

Рассмотрим резонансный режим $p\omega(F)=\nu$, где p — целое число, $\omega(F)=\frac{2\pi}{T(F)}=$ $=\frac{(2\pi)^{3/2}kF}{2l\sqrt{m}\Gamma^2(1/4)}$ частота собственных колебаний, ν — частота внешней силы. Стационарные резонансные значения амплитуды колебаний F и фазовой расстройки $\varphi=\nu t-\psi$ (ψ — фаза собственных колебаний) определяются формулами

$$F_0=\frac{\nu l\sqrt{m}\,\Gamma^2(1/4)}{\pi^{3/2}\sqrt{2}pk}, \quad \sin\varphi_0=-\frac{F_0^2}{a\gamma}\left(\frac{\alpha\lambda k}{l\sqrt{m}}+\frac{5b}{3}F_0^{n-2}\right), \tag{8}$$

где

$$\gamma=\int\limits_{-1}^{1}\sin\left\{\frac{2\pi^{3/2}p}{\Gamma^2(1/4)}F\left(\arccos x,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}dx,$$

F — эллиптический интеграл первого рода. Стационарный режим (8) является устойчивым, если F_0 и φ_0 удовлетворяют условиям устойчивости

$$\cos\varphi_0>0, \quad \frac{6\alpha\lambda k}{l\sqrt{m}}+\frac{10(n+1)}{3}bF_0^{n-2}<0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., Физматгиз, 1960.
2. Писаренко Г. С. Рассеяние энергии при механических колебаниях. Киев, Изд-во АН УССР, 1962.
3. Сб. «Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем». Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
4. Даринский Б. М., Мешков С. И. «Инженерный журнал», механика твердого тела, № 5, 1967.
5. Красносельский М. А., Даринский Б. М., Емелин И. В., Забрейко П. П., Лифшиц Е. А., Покровский А. В. ДАН СССР, **190**, № 1, 1970.
6. Забрейко П. П., Красносельскй М. А., Лифшиц Е. А. ДАН СССР, **190**, № 2, 1970.
7. Волосов В. М. «Успехи математических наук», **17**, вып. 6, 108, 1962.
8. Волосов В. М. «Вычислительная математика и математическая физика», 3, № 1, 1963.
9. Волосов В. М., Моргунов Б. И. «Вычислительная математика и математическая физика», 8, № 2, 1968.
10. Волосов В. М., Моргунов Б. И. 5-летняя математическая школа. Киев, «Наукова Думка», 1968.

Поступила в редакцию
22.2 1971 г.

Кафедра
математики

УДК 539.12.01

А. Г. КУЛЬКИН, Ю. Г. ПАВЛЕНКО

ОБ ИНДУЦИРОВАННОМ ЧЕРЕНКОВСКОМ УСКОРЕНИИ НЕЙТРОНОВ

Рассеяние электромагнитных волн приводит к появлению силы, действующей на рассеивающую частицу. Эта сила относительно невелика, так как пропорциональна e^4.

При наличии среды взаимодействие заряженных частиц с направленным потоком излучения обусловлено в основном процессами индуцированного черенковского излучения и поглощения. В силу этого ускорение частиц определяется разностью поглощаемой и испускаемой энергий, пропорциональной e^2.