УДК 539.1.01

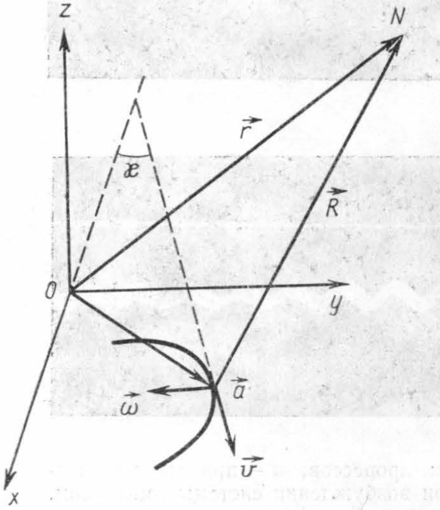
И. М. ТЕРНОВ, В. Г. БАГРОВ, В. А. БОРДОВИЦЫН

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Методами классической теории показано, что усредненное по времени угловое распределение и линейная поляризация электромагнитного излучения заряда, движущегося во внешнем магнитном поле по плоской траектории, не зависят от формы траектории и конкретной конфигурации магнитного поля.

Рассмотрим точечный заряд e, движущийся во внешнем магнитном поле, постоянном во времени, по плоской траектории[1]. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что траектория заряда лежит в плоскости xy декартовой системы координат. Поскольку при движении заряда в произвольном поле скорость заряда $\vec{v}=c\vec{\beta}$ не меняется по величине, ускорение $\vec{\omega}$ ортогонально скорости. Следовательно, в нашем случае оба вектора $\vec{\beta}$ и $\vec{\omega}$ лежат в плоскости xy.

Рассмотрим поле излучения такого заряда в произвольной точке, определяемой радиусом-вектором $\vec{r}$. Величину r будем считать настолько большой, что справедливо приближение волновой зоны (о размерах волновой зоны см. [1]). Считая, что заряд находится в точке $\vec{a}$, для электрического вектора поля излучения имеем



$$\vec{E}=\frac{e\,[\vec{R}_0\,[(\vec{R}_0-\vec{\beta})\,\vec{\omega}]]}{c^2R\,[1-(\vec{R}_0\vec{\beta})]^3},\qquad \vec{R}_0=\frac{\vec{R}}{R}. \tag{1}$$

Выбор системы координат и обозначения поясняются рис. Величины в правой части (1) берутся в момент времени t', определяемый соотношением

$$t'=t-\frac{R\,(t')}{c}.$$

Очевидно, что при достаточно больших $\vec{r}$ справедливо приближение $\vec{r}\approx\vec{R}$.

Средняя по времени интенсивность излучения, как известно [2], определяется выражением

$$W=\frac{c}{4\pi}\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T dt'\int d\Omega R^2E^2\,[1-(\vec{R}_0\vec{\beta})],$$

$$d\Omega=\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi. \tag{2}$$

Если мы хотим рассмотреть линейную поляризацию излучения, то вектор $\vec{E}$ следует разбить на две составляющие [3]

$$\vec{E}=E_2\vec{\beta}_2+E_3\vec{\beta}_3,$$

где единичные векторы $\vec{\beta}_2$ и $\vec{\beta}_3$ ортогональны друг другу и вектору $\vec{R}_0$ и могут быть выбраны в виде

$$\vec{\beta}_2=\frac{[\vec{R}_0\vec{n}]}{\sqrt{1-(\vec{R}_0\vec{n})^2}},\qquad \vec{\beta}_3=\frac{\vec{R}_0\,(\vec{R}_0\vec{n})-\vec{n}}{\sqrt{1-(\vec{R}_0\vec{n})^2}},\qquad \vec{n}=(0,\,0,\,1).$$

[1] Заметим, что случай движения заряда по плоской траектории может быть реализован не только в однородном магнитном поле, но и в достаточно обширном классе неоднородных полей.

Такой выбор векторов $\vec{\beta}_i$ соответствует разложению поля излучения на σ ($\vec{\beta}_2$) и π ($\vec{\beta}_3$) компоненты линейной поляризации (более подробно об этом см. [4], стр. 25). Исходя из (1), легко получить:

$$E_2 = \frac{e\omega}{Rc^2}\,\frac{\cos(\varphi - \varkappa) - \beta\sin\vartheta}{[1 - \beta\sin\vartheta\cos(\varphi - \varkappa)]^3}, \quad E_3 = \frac{e\omega}{Rc^2}\,\frac{\cos\vartheta\sin(\varphi - \varkappa)}{[1 - \beta\sin\vartheta\cos(\varphi - \varkappa)]^3}.$$

Отсюда получаем следующие выражения для интенсивности компонентов поляризации излучения:

$$W_i = \frac{e^2}{4\pi c^3}\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T \omega^2 dt' \int d\Omega S_i \ (i = 2, 3),$$

$$S_2 = \frac{[\cos(\varphi - \varkappa) - \beta\sin\vartheta]^2}{[1 - \beta\sin\vartheta\cos(\varphi - \varkappa)]^5}, \quad S_3 = \frac{\cos^2\vartheta\sin^2(\varphi - \varkappa)}{[1 - \beta\sin\vartheta\cos(\varphi - \varkappa)]^5}. \qquad (3)$$

Отметим, что в (3) углы ϑ и φ и скорость β во времени постоянны. В подынтегральном выражении от времени зависят лишь величины ω^2 и угол $\varkappa$. Проводя в (3) интегрирование по углу φ, получим

$$W_i = \frac{e^2\overline{\omega^2}}{16c^3}\int\limits_0^\pi f_i(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta, \qquad (4)$$

где $f_i(\vartheta)$ — универсальные, не зависящие от времени и пространственного распределения магнитного поля функции ϑ:

$$f_2(\vartheta) = \frac{4 + 3\beta^2\sin^2\vartheta}{(1 - \beta^2\sin^2\vartheta)^{5/2}}, \quad f_3(\vartheta) = \frac{\cos^2\vartheta(4 + \beta^2\sin^2\vartheta)}{(1 - \beta^2\sin^2\vartheta)^{7/2}}.$$

Средний квартал ускорения равен

$$\overline{\omega^2} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \omega^2(t')\,dt'.$$

Таким образом, характер углового распределения излучения по полярному углу ϑ действительно не зависит ни от формы траектории, ни от конфигурации внешнего магнитного поля. Физически это связано с тем обстоятельством, что в магнитном поле скорость по величине остается постоянной. Следовательно, характер углового распределения интенсивности излучения может зависеть лишь от ориентации вектора скорости (от угла $\varkappa$). Однако при интегрировании по φ и эта зависимость пропадает. Интегрируя, наконец, в (4) по углу ϑ, получим, что распределение интенсивности по компонентам поляризации в нашем случае также будет иметь универсальный характер:

$$W_2 = \frac{6 + \beta^2}{8}W, \; W_3 = \frac{2 - \beta^2}{8}W, \; W = W_2 + W_3 = \frac{2}{3}\,\frac{e^2\overline{\omega^2}}{c^3(1 - \beta^2)^2}.$$

Таким образом, эти результаты, известные в частном случае синхротронного излучения (см. [3]), остаются справедливыми для случая движения в произвольном магнитном поле по плоской траектории.

Доказанное утверждение можно обобщить, отказавшись от условия плоского движения, но выбирая систему координат в соприкасающейся к траектории плоскости. Однако при этом следует иметь в виду, что в общем случае ориентация этой плоскости меняется со временем. Отметим также, что в отношении спектрального состава излучения и его круговой поляризации подобные общие утверждения не имеют места — эти характеристики излучения существенно зависят от пространственного распределения магнитного поля и вида траектории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров В. Г. «Оптика и спектроскопия», 18, 541, 1965; Багров В. Г., Бордовицын В. А., Копытов Г. Ф. «Изв. вузов», физика (в печати).

2. Соколов А. А., Жуковский В. Ч., Колесникова М. М., Никитина Н. С., Шишанин О. Е. «Изв. вузов», физика, № 2, 108, 1969.
3. Соколов А. А., Тернов И. М. ЖЭТФ, 31, 473, 1956.
4. Синхротронное излучение. Сборник статей под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
4.6 1971 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 538.565

М. Д. КАРАСЕВ, Е. Ю. СМИРНОВА

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЧЕТНЫХ ГАРМОНИК В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ С НЕЧЕТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Анализ установившегося режима вынужденных колебаний в контуре, содержащем железо или сегнетоэлектрик, может быть сведен в пренебрежении потерями и гистерезисом к задаче Дюффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(x + \gamma x^3) = P \sin t. \tag{1}$$

Если предположить, что величина γ мала, то уравнение (1) можно трактовать как квазилинейное и искать решение в виде ряда по малому параметру μ

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots \tag{2}$$

Применяя стандартную методику последовательных приближений [1], можно получить решение, которое в любом приближении будет представляться рядом

$$x = A_1 \sin t + A_3 \sin 3t + A_5 \sin 5t + \ldots, \tag{3}$$

содержащим только синусы нечетных гармоник, в нерезонансном случае. При анализе резонанса на второй гармонике внешнего воздействия стандартная методика оказывается непригодной, аналогично случаю резонанса 2-го рода для задачи Дюффинга [1, 2].

Однако из качественных физических представлений вытекает возможность возбуждения в системе (1) четных гармоник, как синусоидальных, так и косинусоидальных. Действительно, при достаточно малой нелинейности γ в контуре, описываемом (1), возникают близкие к гармоническим колебания на основной частоте воздействия. Эти колебания вызывают пульсацию реактивного параметра (емкости или индуктивности) с двойной частотой. Таким образом, система может приближенно рассматриваться как параметрический генератор с накачкой на двойной частоте внешнего воздействия. Во второй зоне параметрического возбуждения могут установиться колебания, которые будут представлять четную гармонику внешнего воздействия. Их фаза будет зависеть от расстройки, а амплитуда может ограничиваться реактивной нелинейностью за счет расстроечного механизма [3].

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + k^2(x + \gamma x^3) = P \sin \tau \tag{4}$$

(где τ — безразмерное время), в котором учтено в отличие от (1) также затухание, и найдем условия параметрического возбуждения на двойной частоте. Преобразуем (4) заменой

$$x = y + \frac{P}{k^2 - 1} \sin \tau = y + A \sin \tau \tag{5}$$

к виду

$$\ddot{y} + \lambda^2 (1 - m \cos 2\tau) y = \mu F(\tau, y, \dot{y}, \mu), \tag{6}$$

здесь

$$\lambda^2 = k^2 \left(1 + \frac{3}{2}\gamma A^2\right); \quad m = \frac{\frac{3}{2}\gamma A^2}{1 + \frac{3}{2}\gamma A^2};$$