2. Соколов А. А., Жуковский В. Ч., Колесникова М. М., Никитина Н. С., Шишанин О. Е. «Изв. вузов», физика, № 2, 108, 1969.
3. Соколов А. А., Тернов И. М. ЖЭТФ, 31, 473, 1956.
4. Синхротронное излучение. Сборник статей под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
4.6 1971 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 538.565

М. Д. КАРАСЕВ, Е. Ю. СМИРНОВА

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЧЕТНЫХ ГАРМОНИК В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ С НЕЧЕТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Анализ установившегося режима вынужденных колебаний в контуре, содержащем железо или сегнетоэлектрик, может быть сведен в пренебрежении потерями и гистерезисом к задаче Дюффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(x + \gamma x^3) = P \sin t. \tag{1}$$

Если предположить, что величина γ мала, то уравнение (1) можно трактовать как квазилинейное и искать решение в виде ряда по малому параметру μ

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots \tag{2}$$

Применяя стандартную методику последовательных приближений [1], можно получить решение, которое в любом приближении будет представляться рядом

$$x = A_1 \sin t + A_3 \sin 3t + A_5 \sin 5t + \ldots, \tag{3}$$

содержащим только синусы нечетных гармоник, в нерезонансном случае. При анализе резонанса на второй гармонике внешнего воздействия стандартная методика оказывается непригодной, аналогично случаю резонанса 2-го рода для задачи Дюффинга [1, 2].

Однако из качественных физических представлений вытекает возможность возбуждения в системе (1) четных гармоник, как синусоидальных, так и косинусоидальных. Действительно, при достаточно малой нелинейности γ в контуре, описываемом (1), возникают близкие к гармоническим колебания на основной частоте воздействия. Эти колебания вызывают пульсацию реактивного параметра (емкости или индуктивности) с двойной частотой. Таким образом, система может приближенно рассматриваться как параметрический генератор с накачкой на двойной частоте внешнего воздействия. Во второй зоне параметрического возбуждения могут установиться колебания, которые будут представлять четную гармонику внешнего воздействия. Их фаза будет зависеть от расстройки, а амплитуда может ограничиваться реактивной нелинейностью за счет расстроечного механизма [3].

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + k^2(x + \gamma x^3) = P \sin \tau \tag{4}$$

(где τ — безразмерное время), в котором учтено в отличие от (1) также затухание, и найдем условия параметрического возбуждения на двойной частоте. Преобразуем (4) заменой

$$x = y + \frac{P}{k^2 - 1} \sin \tau = y + A \sin \tau \tag{5}$$

к виду

$$\ddot{y} + \lambda^2(1 - m \cos 2\tau)\, y = \mu F(\tau, y, \dot{y}, \mu), \tag{6}$$

здесь

$$\lambda^2 = k^2\left(1 + \frac{3}{2}\gamma A^2\right); \quad m = \frac{\frac{3}{2}\gamma A^2}{1 + \frac{3}{2}\gamma A^2};$$

$$\gamma = \mu\gamma_0; \quad \delta = \mu^2\delta_0;$$

$$F(\tau, y, \dot{y}, \mu) = -\gamma_0 k^2 (y^3 + 3y^2 A \sin\tau + A^3 \sin^3\tau) - 2\mu\delta_0 (\dot{y} + A \sin\tau).$$

Обращаем внимание, что δ есть величина второго порядка малости, поскольку ширина второй области возбуждения имеет второй порядок малости и неустойчивость возникнет лишь при соответственно малых значениях затухания. Для определения второй области неустойчивости полагаем

$$\lambda^2 = 4 + \mu\alpha_1 + \mu^2\alpha_2 + \ldots \tag{7}$$

Амплитуду A первой гармоники колебаний в контуре с точностью до членов порядка малости μ считаем постоянной величиной, зависящей только от амплиту-

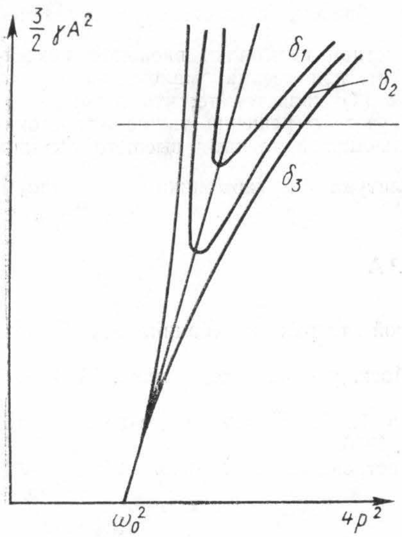

Рис. 1. Зависимость ширины зоны возбуждения от глубины модуляции параметра $m = {}^3/_2\gamma A^2 (\delta_1 > \delta_2 > \delta_3)$

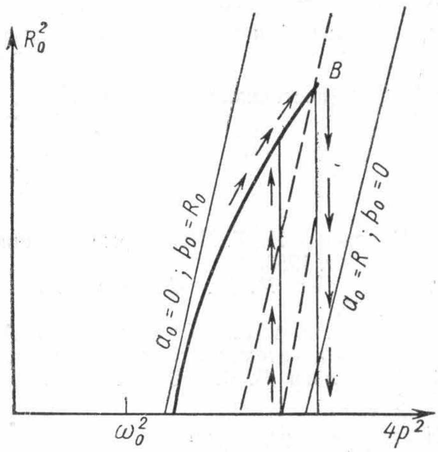

Рис. 2. Резонансные кривые амплитуды второй гармоники при фиксированном значении амплитуды внешнего воздействия

ды P внешнего воздействия, и ищем решение уравнения (6) в виде ряда с периодическими коэффициентами

$$y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \ldots, \tag{8}$$

где

$$y_0 = a_0 \cos 2\tau + b_0 \sin 2\tau. \tag{9}$$

Проводя соответствующие расчеты, находим

$$\alpha_1 = -\frac{3}{4}\gamma k^2 R_0^2, \quad R_0^2 = a_0^2 + b_0^2. \tag{10}$$

Величина α_1 лишь уточняет значение собственной частоты системы в зависимости от амплитуды второй гармоники, область возбуждения определяется только в следующем приближении:

$$\alpha_2 = \frac{2}{3} m^2 \pm \sqrt{m^4 - 16\delta^2}. \tag{11}$$

Соответствующие выражения для установившихся колебаний (9) имеют вид

$$R_0^2 = \frac{4}{3\gamma k^2}\left(4 - \lambda^2 - \frac{2}{3} m^2 \pm \sqrt{m^4 - 16\delta^2}\right), \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 16\delta^2}}{4\delta}. \tag{13}$$

Зависимость ширины зоны возбуждения от глубины модуляции параметра, которая приближенно пропорциональна квадрату амплитуды внешнего воздействия $m \approx \frac{3}{2} \gamma A^2$, показана на рис. 1. Резонансные кривые колебаний второй гармоники при фиксированных значениях A показаны на рис. 2. Затухание приводит к сужению зоны и к уменьшению амплитуды R_0. Фаза второй гармоники изменяется согласно (13) от $\frac{\pi}{2}$ до 0; в высшей точке резонансной кривой (B на рис. 2) $a_0 = b_0$, слева $a_0 < b_0$, справа $a_0 > b_0$. Устойчивой является левая ветвь резонансной кривой, показанная на рис. 2 сплошной линией.

Оценим ширину возбуждения для $m = 0{,}1$, $A = 1$. В этом случае добротность контура Q должна быть не менее 200, а при $Q = 500$ относительная ширина зоны возбуждения $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ составляет всего 1%. Таким образом, в системе, описываемой уравнением (4), могут возбуждаться колебания четной гармоники внешнего воздействия, но возбуждаются они в узкой полосе частот, при весьма малом затухании. В заключение отметим, что особенностью системы (4) является то, что вторую гармонику можно найти только при одновременном учете в решении также и постоянной составляющей [4] и четвертой гармоники, являющихся членами высшего порядка малости (постоянная составляющая $\frac{1}{2} m a_0$, амплитуда 4-й гармоники $\left(-\frac{1}{6} m a_0\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи нелинейной теории колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. Карасев М. Д., Сухов А. Ш. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 123, 1959.
3. Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. М., «Советское радио», 1956.
4. Мигулин В. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 1, 32, 1963.

Поступила в редакцию
15.7 1971 г.

Кафедра
физики колебаний

УДК 621.378.535

Ю. А. ГОРОХОВ, Д. П. КРИНДАЧ, А. Е. НОВИК, А. Н. ЧЕРКАСОВ

ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ АРГОНОВОГО ЛАЗЕРА

Получение непрерывного когерентного излучения в УФ диапазоне имеет ряд принципиальных и практических трудностей, возрастающих с уменьшением длины волны генерации лазера [1]. Эта задача может быть решена методами нелинейной оптики — путем умножения частоты лазеров, работающих в видимом диапазоне.

Одним из наиболее подходящих источников света для удвоения частоты является аргоновый лазер, работающий на длине волны $\lambda_0 = 5145$ Å ($\lambda_г = 2572$ Å). Выходная мощность лабораторных образцов такого лазера может достигать нескольких ватт [2], а нелинейные характеристики кристаллов KDP и ADP обеспечивают достаточную эффективность преобразования [3].

О генерации второй гармоники (ГВГ) аргонового лазера сообщалось в американских работах [3, 4, 5]. В [3] была осуществлена ГВГ излучения лазера, работающего в режиме связанных мод. В [4, 5] для повышения эффективности преобразования нелинейный кристалл, обладавший уникальной прозрачностью ($\delta \sim 10^{-5}$ *см*$^{-1}$), был помещен внутрь резонатора лазера. И то, и другое требовало сложных технических приспособлений.

Нами исследовалась ГВГ вне резонатора с использованием стандартной лазерной трубки с обычными зеркалами, описанной в [2]. Выходная мощность на линии 5145 Å при генерации TEM_{00} моды не превышала 0,6 *вт*. Оптические свойства кри-