Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3—1972

УДК 534.26

В. К. КУЗНЕЦОВ

РЕФРАКЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В КЛИНЕ, ЛЕЖАЩЕМ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Исследуется гидроакустическая задача распространения низкочастотного звука в прибрежной полосе шельфа в условиях переменной глубины. В соответствии с принятыми в гидроакустике и геофизике представлениями область шельфа рассматривается как клиновидная область.

Геометрия задачи изображена на рисунке. Клиновидная область с углом раствора Φ характеризуется волновым числом среды k_1 и плотностью ρ_1, полупространство — соответственно k_2 и ρ_2. Полупространство считаем жидким, как это принято в теории распространения звука в мелком море [1]. Звуковое поле представим величиной звукового потенциала ψ:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\varphi^2}+k_1^2\psi_1=0\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\Phi), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\varphi^2}+k_2^2\psi_2=0\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi+\Phi).$$

При этом $\rho_1\psi_1=\rho_2\psi_2$ на границе $\varphi=\Phi$; $\varphi_1=0$ на $\varphi=0$;

$$\psi_2=0 \text{ на } \varphi=\Phi+\pi;\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}=\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} \text{ на } \varphi=\Phi.$$

Характер граничных условий на $\varphi=\Phi$ не позволяет получить строгое решение в разделенном относительно координаты φ виде. Однако для достаточно больших значений r можно получить приближенное решение в виде ряда нормальных волн путем не строгого разделения:

$$\psi_1=u_1(r,\ z)\,F_1(\varphi,\ \mu(r)),$$

$$\psi_2=u_2(r,\ z)\,F_2(\varphi,\ \mu(r)). \tag{2}$$

Произведя преобразования

$$U_1(r,\ z)=\frac{W_1(r,\ z)}{\sqrt{r}};\quad U_2(r,\ z)=\frac{W_2(r,\ z)}{\sqrt{r}}, \tag{3}$$

путем подстановки (3) и (2) в (1) перейдем к уравнениям

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial r^2} + \left(k_1^2 - \frac{4\mu_1^2(r) - 1}{4r^2}\right) W_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial r^2} + \left(k_2^2 + \frac{4\mu_2^2(r) + 1}{4r^2}\right) W_2 = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi^2} + \mu_1^2(r) F_1 = 0; \qquad \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varphi^2} - \mu_2^2(r) F_2 = 0. \tag{5}$$

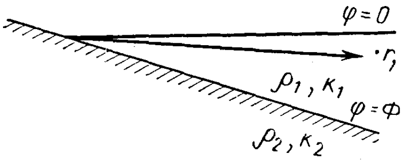

Рис. 1

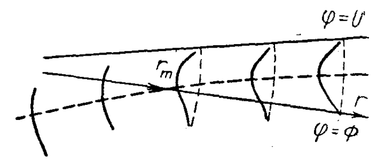

Рис. 2

Величины $\mu_1^2(r)$ и $-\mu_2^2(r)$ играют роль констант разделения и определяются из граничных условий. Граничные условия можно переписать в таком виде:

$$W_1(r, z) \equiv W_2(r, z) \equiv W(r, z); \quad F_1\rho_1 = F_2\rho_2 \text{ на } \varphi = \Phi; \quad F_1 = 0 \text{ на } \varphi = 0$$

$$F_2 = 0 \text{ на } \varphi = \Phi + \pi; \quad \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \text{ на } \varphi = \Phi.$$

Решение уравнений (5) возьмем в виде $F_1 = A_1 \sin\mu_1\varphi$ и $F_2 = A_2 e^{-\mu_2\varphi}$, удовлетворяющем условию $F_1 = 0$ на $\varphi = 0$ и приближенному условию $F_2 \approx 0$ на $\varphi = \Phi + \pi$. Очевидно условие $W_1 \equiv W_2$ удовлетворяется только в том случае, если коэффициенты при W_1 и W_2 в уравнении (4) равны, т. е.

$$k_1^2 - \mu_1^2/r^2 = k_2^2 + \mu_2^2/r^2. \tag{6}$$

Из условия на границе $\varphi = \Phi$ находим $\frac{A_1}{A_2} = \rho_2/\rho_1 e^{-\mu_2\Phi} \frac{1}{\sin\mu_1\Phi}$ и $\mu_1 = -\mu_2\rho_1/\rho_2 \operatorname{tg}(\mu_1\Phi)$. С помощью (6) исключаем μ_2 и получаем дисперсионное уравнение

$$\operatorname{tg}\mu_1\Phi = l\frac{\mu_1}{\sqrt{k_1^2 r^2(1 - n^2) - \mu_1^2}}; \quad n = k_2/k_1; \quad l = \rho_2/\rho_1; \tag{7}$$

Оно аналогично дисперсионному уравнению в задаче для плоского слоя, лежащего на полупространстве [1]. Запишем его в другом виде, явно содержащем порядок нормальной волны m:

$$\mu_1 = m\frac{\pi}{\Phi} - \frac{1}{\Phi}\operatorname{arctg}\left[\rho_2/\rho_1\frac{\mu_1}{\sqrt{k_1^2 r^2(1 - n^2) - \mu_1^2}}\right]; \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

Величины μ_1 и μ_2 определяют профиль нормальной волны, т. е. распределение звукового давления по координате φ. Они находятся из (8) и (6).

Распределение поля нормальной волны в плоскости (r, z), т. е. функция $W(r, z)$, определяется уравнением:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + (k_1^2 - \mu_1^2/r^2) W = 0, \tag{9}$$

полученным из (4) с учетом (6) и при $\mu_1 \gg 1$. (Единица в выражении $\frac{4\mu^2-1}{4r^2}$ уравнений (4) учитывает дифракцию на угловой точке [2]. У нормальных волн не нулевого порядка дифракция на угловой точке не играет заметной роли даже в случае клина с идеально отражающими границами.)

Из (9) следует, что здесь, как и в «идеальном» клине [3], нормальная волна распространяется подобно волне в слоистонеоднородной среде с показателем преломления $n_m = \sqrt{1-\frac{\mu_1^2}{k_1^2 r^2}}$, испытывая рефракцию. Существенное усложнение в сравнении со случаем «идеального» клина привносится фактом зависимости μ_1 от r, выраженной трансцендентным уравнением (8). Формальное решение (9) в случае «плоской» нормальной волны, распространяющейся из $r=\infty$, можно написать в виде приближения ВКБ

$$ik_1 \left(\cos\gamma_0 z + \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\sin^2\gamma_0 - \mu_1^2/k_1^2 r^2\, dr}\right),$$

$$W(r, z) = \frac{ik_1 \left(\cos\gamma_0 z + \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\sin^2\gamma_0 - \mu_1^2 \mid k_1^2 r^2 \cdot dr \mid}\right)}{\sqrt[4]{\sin^2\gamma_0 - \mu_1^2/k_1^2 r^2}}. \qquad (10)$$

Через γ_0 обозначен угол первоначального направления распространения, отсчитываемый от оси z.

Из дисперсионного уравнения (8) видно, что по отношению к нормальной волне заданного порядка m вся область клина разбивается на две подобласти, разграниченные прямой

$$r = r_m = \frac{(2m-1)\pi}{2k_1\Phi\sqrt{1-n^2}}. \qquad (11)$$

В подобласти $r > r_m$ μ_1 принимает вещественные значения. Эту подобласть мы будем называть волноводной зоной. В ней допустимо нестрогое разделение переменных и поле представляется в виде ряда не взаимодействующих между собой и не затухающих нормальных волн. Подобласть $r < r_m$ будем называть неволноводной зоной, а границу $r=r_m$ — линией выхода нормальной волны из клина в полупространство. Смысл последнего определения виден из рис. 2, где изображена последовательность профилей нормальной волны первого порядка для различных значений r. В области больших значений r $\mu_1 \approx m\frac{\pi}{\Phi}$, т. е. профиль нормальной волны почти не отличается от профиля нормальной волны в клине с акустически мягкими границами. По мере приближения к линии $r=r_m$ максимум профиля опускается и вместе с тем растет его экспоненциальная часть в полупространстве — нормальная волна как бы медленно погружается в полупространство. На линии $r=r_m$ максимум профиля достигает границы $\varphi=\Phi$. (Если речь идет о нормальной волне второго или более высокого порядка, то имеется в виду нижний максимум ее профиля.) На линии $r=r_m$ $\mu(r_m) = m\frac{\pi}{\Phi} - \frac{\pi}{2\Phi}$, как в плоском слое критической толщины. Таким образом, наряду с рефракцией нормальной волны в «горизонтальной» плоскости (r, z) здесь имеет место также смещение нормальной волны в вертикальной плоскости $z=\mathrm{const}$, которое приводит при определенных условиях к излучению энергии нормальной волны в полупространство в окрестности линии $r=r_m$. При этом происходит также частичное отражение нормальной волны обратно в волноводную зону. Однако преломленная в полупространство часть нормальной волны является преобладающей в типичных гидроакустических ситуациях, так что имеет смысл говорить о выходе нормальных волн из клина в полупространство [4].

Дисперсионное уравнение (8) в неволноводной зоне не работает, и полученные результаты непосредственным образом не применимы для описания полей, вышедших в полупространство нормальных волн. Тем не менее с помощью представления нормальных волн в клине в виде волн Брюллюэна, претерпевающих многократные отражения от границ клина, оказалось возможным описать и выход нормальных волн в полупространство и наблюдающееся при этом их частичное отражение в волноводную зону. Здесь мы ограничимся главным образом рассмотрением явления рефракции нормальных волн в волноводной зоне и связанных с ним аспектов задачи.

Дисперсионное уравнение в виде трансцендентного уравнения (8), не разрешенного относительно μ_1, не годится для аналитических операций, требующих определения μ_1. Поэтому перейдем от (8) к параметрической системе двух уравнений. Сделаем это с помощью представления нормальной волны в клине в виде пары волн Бриллюэна [2].

Компоненты волновых векторов волн Бриллюэна нормальной волны, приходящей из $r=\infty$ под углом γ_0 к оси z, запишутся следующим образом:

$$k_z = k_1 \cos\gamma_0; \quad k_s = \pm\frac{\mu_1(r)}{r}; \quad k_r = \sqrt{k_1^2 - k_5^2 - k_r^2} = k_1^2 \times$$
$$\times \sqrt{\sin^2\gamma_0 - \frac{\mu_1^2(r)}{k_1^2 r^2}}. \tag{12}$$

Компоненты k_r и k_z образуют волновой вектор нормальной волны. Если через γ обозначить угол между касательной к лучу нормальной волны в текущей точке и осью z, то получим

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{dr}{dz} = k_r/k_z = \sqrt{\operatorname{tg}^2\gamma_0 - \frac{\mu_1^2(r)}{k_1^2 r^2 \cos^2\gamma_0}} \tag{13}$$

или

$$k_1 r = \mu_1(r)\frac{\cos\gamma}{\sqrt{\cos^2\gamma - \cos^2\gamma_0}}. \tag{14}$$

Подставив (13) в (8), получим

$$\mu_1\Phi = m\pi - \operatorname{arctg}\left[l\sqrt{\frac{\cos^2\gamma - \cos^2\gamma_0}{\cos^2\gamma_0 - n^2\cos^2\gamma}}\right]. \tag{15}$$

Уравнения (14) и (15) образуют параметрическую систему уравнений, эквивалентную уравнению (8). Параметр γ изменяется в пределах $0\leqslant\gamma\leqslant\gamma_0$. Еще проще записать систему через параметр

$$\psi_1 = \arcsin\left(\frac{\cos\gamma_0}{\cos\gamma}\right), \tag{16}$$

$$k_1 r = \mu_1/\cos\psi_1;$$

$$\mu_1\Phi = m\pi - \operatorname{arctg}\left[l\frac{\cos\psi_1}{\sqrt{\sin^2\psi_1 - n^2}}\right], \tag{17}$$

$$0 \leqslant \psi_1 \leqslant \arcsin n_1 \tag{18}$$

Параметр ψ_1 имеет смысл угла падения волны Бриллюэна на плоскость $\varphi=\mathrm{const}$, что легко видеть из сравнения (12) и первого уравнения системы (17); $\cos\varphi_1=k_s/k_1=\mu_1/k_1 r$. Заметим, что первое уравнение системы (17) можно рассматривать как обобщенное выражение инварианта Вестона [5], выведенного им для частного случая плоской задачи, когда $\gamma_0=\pi/2$, и зеркально отражающих границ, когда $\mu_1=\mathrm{const}=\pi/\Phi$. Систему (17) нетрудно приспособить и для параметрического представления дисперсионного уравнения в задаче для плоского слоя.

Одной из характерных линий в рефракционной картине является линия поворота нормальной волны (точка поворота в теории ВКБ). Из (10) видно, что на этой линии $r=r_{\text{пов}}=\mu_1/k_1\sin\gamma_0$. Найдем ее из системы (17), применив к системе условие $\gamma=0$, $\psi_1=\arcsin(\cos\gamma_0)$:

$$r_{\text{пов}}=\frac{1}{k_1\Phi\sin\gamma_0}\left\{m\pi-\operatorname{arctg}\left[l\frac{\sin\gamma_0}{\sqrt{\cos^2\gamma_0-n^2}}\right]\right\}. \tag{19}$$

Отсюда видно, что если $\cos\gamma_0>n$, то $r_{\text{пов}}>r_m$ и нормальная волна, не доходя до границы волноводной зоны, отражается путем рефракции в сторону $r=\infty$. В этом случае нормальная волна нигде не выходит из клина. В предельном случае

$$\cos\gamma_0=\cos\gamma_{on}=n, \tag{20}$$

$r_m=r_{\text{пов}}$, т. е. линия поворота совпадает с границей волноводной зоны. В случае $\cos\gamma_0<n$ нормальная волна выходит на $r=r_m$ из волноводной зоны и, следовательно, из клина.

Таким образом, при условии $\cos\gamma_0\geqslant n$ наблюдается полное отражение нормальной волны в сторону $r=\infty$ аналогично полному внутреннему отражению плоской волны от плоской границы раздела с показателем преломления n. В этой аналогии нет ничего неожиданного, если учесть, что условие $\cos\gamma_0\geqslant n$ эквивалентно условию $\sin\psi_1\geqslant n$, т. е. условию полного внутреннего отражения волны Бриллюэна, падающей на границу $\varphi=\Phi$ под углом ψ_1. Подстановкой $\operatorname{tg}\gamma=dr/dz$ в (14) и (15) получается дифференциальное уравнение луча нормальной волны

$$k_1 r\Phi\sqrt{\sin^2\gamma_0-\cos^2\gamma_0\,(dr/dz)^2}=m\pi-$$
$$-\operatorname{arctg}-\left[l\sqrt{\frac{\sin^2\gamma_0-\cos^2\gamma_0\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}{\cos^2\gamma_0-n^2+\cos^2\gamma_0\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}\right]. \tag{21}$$

Уравнение (21) в результате интегрирования и уравнение (19) дают параметрическую систему уравнений лучей нормальной волны. Для расходящейся из точки $r=r_0$ $(z=0)$ нормальной волны эта система имеет вид

$$r=\frac{1}{\Phi k_1\cos\psi_1}\left\{m\pi-\operatorname{arctg}\left[l\frac{\cos\psi_1}{\sqrt{\sin^2\psi_1-n^2}}\right]\right\}; \tag{22}$$

$$z=\frac{\sin\psi_0\cos\vartheta_0}{1-\sin^2\psi_0\cos^2\vartheta_0}\left\{\pm r\sqrt{\sin^2\psi_1-\sin^2\psi_0\cos^2\vartheta_0}\pm r_0\sin\psi_0\sin\vartheta_0+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{1-n^2}\,\mathrm{ar}\,\mathrm{th}}{\Phi k_1\sqrt{a}\,\mathrm{arc}\,\mathrm{th}}\left[\frac{\pm l\sqrt{a}\sqrt{1-n^2}\left[\pm\sqrt{(\sin^2\psi_1-\sin^2\psi_0\cos^2\vartheta_0)(\sin^2\psi_0-n^2}\pm\right.}{a\sqrt{(\sin^2\psi_1-n^2)(\sin^2\psi_0-n^2)}\mp l^2(1-n^2)\sin\psi_0\sin\vartheta_0\times}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\pm\sin\psi_0\sin\vartheta_0\sqrt{\sin^2\psi_1-n^2}\,\Big]}{\sqrt{\sin^2\psi_1-\sin^2\psi_0\cos^2\vartheta_0}}\right\}. \qquad (23)$$

Здесь ψ_0 значение параметра ψ_1 в точке источника $(r_0, 0)$, ϑ_0 — угол выхода луча относительно оси z, $a=\sin^2\psi_0\cos^2\vartheta_0+l^2(1-\sin^2\psi_0\cos\vartheta_0)$. Верхний знак перед радикалом берется до точки поворота луча, где

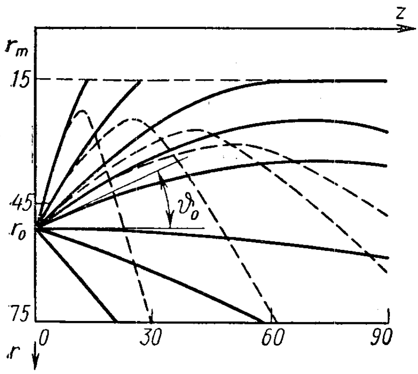

Рис. 3

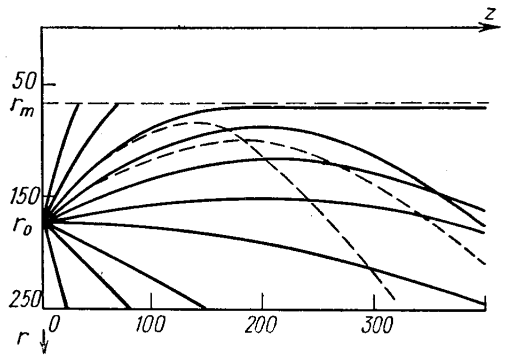

Рис. 4

$\sin\psi_1=\sin\psi_0\cos\vartheta_0$, нижний — после точки поворота. В промежутке углов $\cos\vartheta_{0n}<|\cos\vartheta_0|<1$ берется arth, вне этого промежутка берется arcth. Предельный угол $\vartheta_{0n}=\arccos n/\sin\psi_0$; на рис. 3 и 4 изображены лучевые картины расходящейся нормальной волны в клине $\Phi=4°$, $n=0{,}64$, $l=1{,}59$, $f=33$ *кгц* для $m=1$ и $m=3$ соответственно. (Пунктиром для сравнения изображены лучи нормальной волны в идеальном клине при соответствующих условиях.) Центральный участок фронта нормальной волны $\vartheta_{0n}<\vartheta_0<\pi-\vartheta_{0n}$ пересекает границу волноводной зоны $r=r_m$, а примыкающие к нему фланги $0<\vartheta_0<\vartheta_{0n}$, $\pi-\vartheta_n<\vartheta_0<\pi$ полностью отражаются в результате рефракции в сторону $r=\infty$. Профиль нормальной волны опускается в полупространство по мере движения волны вдоль луча до точки поворота (см. рис. 2), за точкой поворота он снова поднимается.

Из дисперсионного уравнения (8) следует, что с увеличением порядка m нормальная волна в «неидеальном» клине становится подобной нормальной волне в «идеальном» клине, поскольку зависимая от r часть μ_1, никогда не превышающая $\pi/2$, становится незначительной добавкой к константе $m\frac{\pi}{\Phi}$, представляющей μ в «идеальном» клине.

Расчет интерференционной структуры поля расходящейся нормальной волны связан с еще более громоздкими, чем в «идеальном» клине [6], выражениями. Приведем лишь некоторые асимптотические оценки дальнего поля для достаточно больших значений r. Граница зоны тени в дальнем поле определяется асимптотой каустики

$$\sin\gamma_0=\frac{\mu_1(r)}{k_1 r_0} \qquad (24)$$

(γ_0 имеет смысл полярного угла), $\gamma_0=\arccos\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$.

Из (8) видно, что, если r_0 достаточно велико, то $\mu_1(r_0) = m\frac{\pi}{\Phi}$, и, следовательно, асимптоты каустики, определяющие ширину характеристики направленности поля нормальной волны в клине от точечного источника, рассчитываются по формуле «идеального» клина.

Амплитуда $|W_m^-|$ прямой волны (прямую волну представляет участок фронта $\pi<\vartheta_0<2\pi$, отраженную — $0<\vartheta_0<\pi$) определяется выражением

$|W_m^-| = A\frac{k_1 r_0 \sin\gamma_0}{\sqrt{k_1^2 r_0^2 \sin^2\gamma_0 - \mu_1^2(r)}}$, отраженной волны — $|W_m^+| = A\,V(\gamma_0)\times$

$$\times\frac{k_1 r_0 \sin\gamma_0}{\sqrt{k_1^2 r_0^2 \sin^2\gamma_0 - \mu_1^2(r_0)}}.$$

Коэффициент A определяется мощностью источника, $V(\gamma_0)$ — модуль коэффициента отражения.

В первом приближении

$$|V\gamma_0)| = \prod_j^N v(\psi_{zj}),$$

$$v(\psi_{zj}) = \frac{l\cos\psi_{zj}\sin\gamma_0 - \sqrt{n^2-1+\cos^2\psi_{zj}\sin^2\gamma_0}}{l\cos\psi_{zj}\sin\gamma_0 + \sqrt{n^2-1+\cos^2\psi_{zj}\sin\gamma_0}},$$

$$\psi_{zj} = \arccos\frac{\sqrt{1-n^2}}{\sin\gamma_0} - (2j-1)\Phi, \quad j = 1,\ 2,\ 3, \ldots N,$$

$$N = \left\{\arccos[\sqrt{1-n^2}]/\sin\gamma_0\frac{1}{\Phi}\right\}$$

(N — округленная до целого числа величина). Отражение центральной части фронта $\vartheta_{0n}<\vartheta_0<\pi$ происходит в неволноводной зоне и сопровождается ослаблением волны за счет преломления в полупространство.

При не очень малых n и малых Φ амплитуда в центральной части отраженной волны незначительна. Это видно из графиков рис. 5, построенных для четырех случаев: *1* — $n=0{,}64$; $l=1{,}59$; $\Phi=4°$; *2* — $n=0{,}64$, $l=1{,}59$, $\Phi=12°$; *3* — $n=0{,}83$, $l=0{,}37$, $\Phi=4°$ и *4* — $\Phi=12°$. При некогерентном сложении прямой и отраженной волны получаем

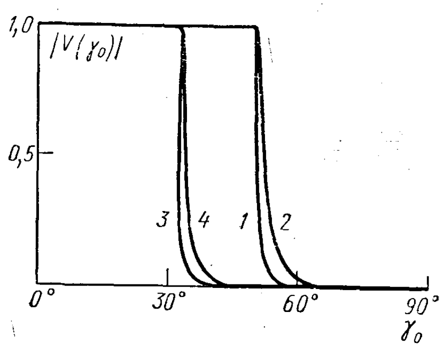

Рис. 5

$$|W_m| = |W_m^-| + |W_m^+| = [1 + (V(\gamma_0)]\,J\,\frac{k_1 r_0 \sin\gamma_0}{k_1^2 r_0^2 \sin^2\gamma_0 - \mu_1^2(r_0)}.$$

Это выражение не описывает поле в зоне тени, в окрестности каустики, поскольку на каустике оно обращается в ∞. В зоне тени, на каустике и в ее окрестности поле описывается функцией Бесселя

$W_m| \approx AJ_{\mu_1(r_0)}(k_1 r_0 \sin\gamma_0)$ в промежутке углов $0 \leqslant \gamma_0 \leqslant \arcsin\frac{\mu_1(r)}{k_1 r_0} + \Delta\delta_0$.

Поле точечного источника в клине с координатами $r=r_0$, $z=0$ и $\varphi=\varphi_0$ представляется рядом нормальных волн, содержащим практически конечное число членов:

$$\psi = 2A \frac{\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{F(\mu)} \sin[\mu(r_0)\varphi_0] \sin[\mu_1(r_0)\varphi] Wm(r, z).$$

Число M равно числу нормальных волн, для которых $z_0 \geqslant r_m$, т. е. $M=\{k_1 r_0 \Phi \sqrt{1-n^2}+\pi/2\}$.

На основании изложенных результатов, описывающих поля нормальных волн, рассчитывается распространение низкочастотного звука в полосе шельфа. Для расчета высокочастотных полей в полосе шельфа можно воспользоваться методом мнимых источников [7]. Тот или другой метод выбирается путем сравнения чисел M и $N=\left\{\frac{2\pi}{\Phi}\right\}$ (число мнимых источников, исключая дифракционные). Если число нормальных волн M больше числа мнимых источников N, то для расчета поля наряду с методом нормальных волн, незаменимого в периферийной области, целесообразно прибегать к методу мнимых источников в «центральной» части освещенной области. В качестве условной границы между «центральной» и периферийной областью можно принять линию каустики N-й нормальной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957, стр. 437.
2. Кузнецов В. К. Представление волноводного поля в клине от точечного источника в виде волн Бриллюэна. VI Всесоюзная акустическая конференция (А-IV-5). М., 1968.
3. Кузнецов В. К. «Акустический журнал», 5, 2, 170—175, 1959.
4. Кузнецов В. К., Низамов В. Т. Труды VI Всесоюзной акустической конференции, (А-IV-6), М., 1968.
5. Weston D. E. Guided Propogation in a slowly varying Medium. Proc. Phys. Soc. (London), 73, 365—384, 1959.
6. Кузнецов В. К. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 3, 19—21, 1967.
7. Кузнецов В. К. «Акустический журнал», 18, 2, 1972.

Поступила в редакцию
1.3 1971 г.

Кафедра
акустики