Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3—1972

УДК 531.18

Г. Ю. БОГОСЛОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ПОЛНОЙ СИСТЕМЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ТРЕХЧАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

С помощью метода, предложенного в работе [1], рассмотрена группа инвариантных преобразований трехчастичного фазового пространства и соответствующая ей параметризация релятивистской энергетической поверхности. Получена ортонормированная базисная система состояний на этой поверхности.

Введение

Как известно, всякое парциальное разложение амплитуд реакций начинается с построения базисной системы состояний в представлении углового момента. Такие состояния для n-частиц являются функциями от точки на энергетической поверхности и обладают определенными трансформационными свойствами относительно преобразований, оставляющих инвариантным уравнение энергетической поверхности и элемент n-частичного фазового объема. Простейшим примером в случае двухчастичных состояний могут служить обычные сферические функции. Нерелятивистский трехчастичный базис обычно строится как базис неприводимого представления группы вращений шестимерного пространства, поскольку энергетическая поверхность является в этом случае пятимерной сферой в пространстве двух нормированных относительных импульсов [2—12].

Для релятивистских частиц ситуация оказывается значительно более сложной [13, 14]. Это прежде всего связано с иррациональной зависимостью полной энергии от импульсов частиц. В работах [15, 16] классификацию релятивистских трехчастичных состояний осуществляют, используя теорию неприводимых представлений группы Пуанкаре; при этом трехчастичные состояния получаются путем последовательного спаривания частиц, а наряду с дискретными квантовыми числами полного и относительного угловых моментов, базисные векторы характеризуются еще непрерывным числом — массой покоя подсистемы из двух частиц, что снижает эффективность такой классификации.

В настоящей работе будет построена ортонормированная на релятивистской энергетической поверхности полная система трехчастичных состояний с дискретным набором квантовых чисел. Задача решается с помощью метода, предложенного в [1].

Постановка задачи. Группа инвариантных преобразований

Рассмотрим три релятивистские бесспиновые частицы с массами покоя m_1, m_2, m_3 и 4-импульсами k_1, k_2, k_3; $k_0^2-\vec{k}^2=m^2$.

Состояние трехчастичной системы определяется в произвольной системе отсчета девятью переменными $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$, $\vec{k}_3$. В с.ц.и. трех частиц, когда $\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3=0$ остается лишь шесть независимых кинематических переменных. В качестве таких переменных выберем два относительных 3-импульса: $\vec{p}=\vec{k}_1+\vec{k}_2=-\vec{k}_3$ — импульс пары как целого в с.ц.и. трех частиц и q — импульс первой частицы в с.ц.и. пары (1, 2). В этих переменных полная энергия в с.ц.и. трех частиц принимает вид

$$E=\sqrt{\vec{p}^2+m_3^2}+\sqrt{\vec{p}^2+\left(\sqrt{\vec{q}^2+m_1^2}+\sqrt{\vec{q}^2+m_2^2}\right)^2}\,. \tag{1}$$

Если вычислить соответствующий якобиан, то для релятивистски инвариантного элемента трехчастичного фазового объема получим

$$\delta^4(K-K')\frac{d\vec{k}_1}{2k_{10}}\frac{d\vec{k}_2}{2k_{20}}\frac{d\vec{k}_3}{2k_{30}}=\delta(E-E')\frac{2E^2\varepsilon_{12}^3\,d\vec{p}\,d\vec{q}}{[E^4-(\varepsilon_{12}^2-m_3^2)^2]\,[\varepsilon_{12}^4-(m_1^2-m_2^2)^2]}, \tag{2}$$

где $K=k_1+k_2+k_3$, ε_{12} — полная энергия пары частиц (1, 2) в их с.ц.и., т. е.

$$\varepsilon_{12}=\sqrt{\vec{q}^2+m_1^2}+\sqrt{\vec{q}^2+m_2^2}\,. \tag{3}$$

В нерелятивистском случае энергетическая поверхность (1) становится эллипсоидом

$$E=m_1+m_2+m_3+\frac{\vec{q}^2}{2\mu_{12}}+\frac{\vec{p}^2}{2\mu_{(12)3}}$$

(где $\mu_{12}=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ и $\mu_{(12)3}=\dfrac{(m_1+m_2)m_3}{m_1+m_2+m_3}$ — приведенные массы), или сферой в пространстве нормированных импульсов. Элемент фазового объема (2) при этом переходит с точностью до постоянного множителя в элемент поверхности сферы.

Найдем полную ортонормированную с мерой (2) систему функций на энергетической поверхности (1). Уравнение (1) задает нам семейство пятимерных выпуклых поверхностей в шестимерном пространстве импульсов $\vec{p}$, $\vec{q}$, а формула (2) определяет меру на поверхностях этого семейства. Чтобы рассмотреть задачу в общем виде, обозначим 6 координат $\vec{p}$, $\vec{q}$ через x_1, x_2, ..., x_6. Уравнение семейства поверхностей запишем в виде $f(x_1, ..., x_6)=F$ и меру на поверхности — в виде $\delta(f-F)\times G(x_1, ..., x_6)\,dx_1 ... dx_6$.

Мы хотим найти однопараметрическую непрерывную группу преобразований координат $x_i'=\Phi_i(x_1, ..., x_6;\ \alpha)$, относительно которых семейство поверхностей и мера на них будут инвариантными, т. е.

$$f(x_1', \ldots, x_6')=f(x_1, \ldots, x_6), \tag{4}$$

$$G(x_1', \ldots, x_6')\,dx_1' \ldots dx_6'=G(x_1, \ldots, x_6)\,dx_1 \ldots, dx_6. \tag{5}$$

Такая однопараметрическая группа, вообще говоря, будет подгруппой более широкой группы преобразований, удовлетворяющих условиям (4) и (5). Практически для конкретных f и G такую группу удается отыскать, коль скоро найдены генераторы нетривиальной однопараметрической ее подгруппы.

Пусть параметр α получает приращение $d\alpha$. Тогда

$$x_i' = x_i + \varphi_i(x_1, \ldots, x_6)\, d\alpha. \tag{6}$$

В работе [1] были сформулированы условия, которым должны удовлетворять генераторы φ_i инфинитезимального преобразования (6), чтобы выполнялись соотношения (4) и (5):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi_i = 0; \quad \frac{\partial (G\varphi_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{7}$$

Для трех различных частиц семейство энергетических поверхностей имеет вид (1), а функция G будет:

$$G = \frac{2E^2\varepsilon_{12}^3}{[E^4 - (\varepsilon_{12}^2 - m_3^2)^2]\,[\varepsilon_{12}^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2]}. \tag{8}$$

Сразу бросается в глаза, что как E, так и G зависят только от квадратов импульсов, т. е. $E = E(\vec{q}^2, \vec{p}^2)$, $G = G(\vec{q}^2, \vec{p}^2)$. Поэтому ясно, что независимые вращения в трехмерных подпространствах $\vec{q}$ и $\vec{p}$ образуют группу инвариантности энергетической поверхности (1) и меры на ней (2). Помимо этого существует нетривиальная однопараметрическая группа инвариантности, коммутирующая с упомянутыми выше трехмерными вращениями и состоящая из таких преобразований импульсов $\vec{q}$ и $\vec{p}$, которые меняют их величину, но не меняют направлений. При этом, разумеется, должны соблюдаться условия (4) и (5), т. е. генератор такой группы должен быть решением уравнений (7).

Имея в виду сказанное, запишем бесконечно малое преобразование искомой группы в виде

$$\begin{aligned} d\vec{q} &= \varphi(q, p)\frac{\vec{q}}{q}\, d\alpha, \\ d\vec{p} &= -\psi(q, p)\frac{\vec{p}}{p}\, d\alpha, \end{aligned} \tag{9}$$

где функции φ и ψ подлежат определению с помощью уравнений (7), которые в терминах φ и ψ имеют вид

$$\varphi\frac{\partial E}{\partial q} - \psi\frac{\partial E}{\partial p} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial (G\varphi)}{\partial q} - \frac{\partial (G\psi)}{\partial p} + 2G\left(\frac{\varphi}{q} - \frac{\psi}{p}\right) = 0. \tag{11}$$

Заменяя в уравнении (11) ψ на φ в силу (10) и деля на $G\varphi$, получаем окончательно

$$\frac{\partial \ln|G\varphi|}{\partial q} - \left(\frac{\dfrac{\partial E}{\partial q}}{\dfrac{\partial E}{\partial p}}\right)\frac{\partial \ln|G\varphi|}{\partial p} =$$

$$= -\frac{2}{q} + \frac{2}{p}\left(\frac{\dfrac{\partial E}{\partial q}}{\dfrac{\partial E}{\partial p}}\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\dfrac{\partial E}{\partial q}}{\dfrac{\partial E}{\partial p}}\right). \tag{12}$$

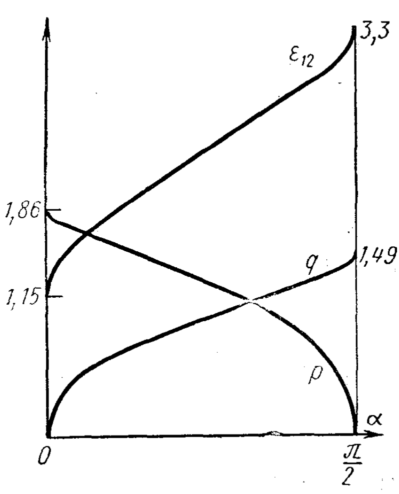
Таким образом, мы получили для определения функции $\varphi(q, p)$ квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных относительно неизвестной функции $\ln|G\varphi|$. Если записать с помощью (1) коэффициенты этого уравнения как явные функции от q и p, то (12) можно решить, причем общий интеграл его получается следующим:

$$G\varphi = \frac{c(E)}{q^2 p\,[E^4 - (\varepsilon_{12}^2 - m_3^2)^2]}. \tag{13}$$

Здесь $c(E)$ — пока произвольная функция от энергии. С помощью (8), (10) и (9) находим инфинитезимальное преобразование искомой группы

$$\begin{aligned} d\vec{q} &= \frac{c(E)\,[\varepsilon_{12}^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2]}{2E^2 q^3 p\, \varepsilon_{12}^3}\,\vec{q}\,d\alpha, \\ d\vec{p} &= -\frac{c(E)\,\varepsilon_{12}(E^2 - \varepsilon_{12}^2 + m_3^2)}{E^4 q p^3}\,\vec{p}\,d\alpha. \end{aligned} \tag{14}$$

Поскольку такие преобразования оставляют инвариантными уравнение энергетической поверхности (1) и направления импульсов $\vec{q}$ и $\vec{p}$, то (14) можно понимать как уравнения, определяющие параметризацию $q = q(\alpha)$ и $p = p(\alpha)$ на поверхности $E = \text{const}$.



Отметим, что в силу соотношений (1) и (3)

$$q = \frac{\sqrt{\lambda(\varepsilon_{12}^2, m_1^2, m_2^2)}}{2\varepsilon_{12}}, \qquad p = \frac{\sqrt{\lambda(E^2, \varepsilon_{12}^2, m_3^2)}}{2E}, \tag{15}$$

где $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$ — характерная для релятивистской кинематики квадратичная форма.

Умножая первое из уравнений (14) скалярно на $\vec{q}$ и используя тот факт, что $4\varepsilon_{12}^3 \vec{q}\,d\vec{q} / [\varepsilon_{12}^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2] = d\varepsilon_{12}$, получаем

$$\frac{E^2}{2c(E)}\, qp\, d\varepsilon_{12} = d\alpha. \tag{16}$$

Интегрируя это уравнение с учетом (15) при $\alpha = 0$ и $q = 0$, то при $\varepsilon_{12} = m_1 + m_2$, имеем:

$$\frac{E}{8c(E)} \int\limits_{(m_1+m_2)}^{\varepsilon_{12}} \frac{\sqrt{\lambda(\varepsilon_{12}^2, m_1^2, m_2^2)\,\lambda\,(E^2, \varepsilon_{12}^2, m_3^2)}}{\varepsilon_{12}}\, d\varepsilon_{12} = \alpha. \qquad (17)$$

Функция $c(E)$ находится из условия что $\alpha = \pi/2$ при $q = q_{\max}$, т. е. при $\varepsilon_{12} = E - m_3$:

$$c(E) = \frac{E}{4\pi} \int\limits_{(m_1+m_2)}^{(E-m_3)} \frac{\sqrt{\lambda(\varepsilon_{12}^2, m_1^2, m_2^2)\,\lambda\,(E^2, \varepsilon_{12}^2, m_3^2)}}{\varepsilon_{12}}\, d\varepsilon_{12}. \qquad (18)$$

В приложении интегралы, входящие в выражения (17) и (18), вычислены как явные функции от ε_{12}, E, m_1, m_2, m_3. На рисунке показан ход кривых $p(\alpha)$, $q(\alpha)$, $\varepsilon_{12}(\alpha)$ в случае $m_1 = m_p = 1$, $m_2 = m_{\pi^+} = 0{,}149$, $m_3 = m_n = 1{,}001$, $E = 4{,}3$.

Координаты и базисные функции на энергетической поверхности

Формула (17) совместно с формулами (15) определяет p и q, т. е. радиусы сфер в трехмерных подпространствах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, как периодические функции угла α. При $\alpha = 0$ имеем $q = 0$, $p = p_{\max}$.

С увеличением α от нуля до $\frac{\pi}{2}$ q-сфера раздувается до максимально возможного для данной энергии размера $q = q_{\max}$, а p-сфера стягивается в точку $p = 0$. Увеличивая угол α дальше до π, получаем уменьшение q-сферы до нуля и растяжение p-сферы до $p = p_{\max}$ и так далее. Поэтому однозначная параметризация энергетической поверхности при заданных направлениях импульсов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ может быть достигнута с помощью $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, при этом α, $\alpha + \pi$ и $-\alpha$ отвечают одной и той же точке на энергетической поверхности.

Кроме α в соответствии с имеющейся инвариантностью энергетической поверхности и меры на ней относительно независимых вращений импульсов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ разумно ввести еще четыре ортогональные сферические координаты, задающие направление $(\vec{e}_{12})$ единичного вектора вдоль $\vec{q}$ и направление $(\vec{e}_{(12)3})$ единичного вектора вдоль $\vec{p}$. После чего элемент фазового объема на энергетической поверхности принимает особенно простой и удобный вид

$$\delta^4(K - K')\, \frac{d\vec{k}_1}{2k_{10}}\, \frac{d\vec{k}_2}{2k_{20}}\, \frac{d\vec{k}_3}{2k_{30}} = \frac{c(E)}{4E^3}\, d\alpha\, d\Omega\,(\vec{e}_{(12)\,3})\, d\Omega\,(\vec{e}_{(12)3}), \qquad (19)$$

где $c(E)$ дается формулой (18), а $d\Omega(\vec{e}_{12})$ и $d\Omega(\vec{e}_{12})$ — элементы телесных углов вокруг направлений $\vec{e}_{12}$ и $\vec{e}_{(12)3}$.

Полная ортонормированная система состояний на энергетической поверхности, отвечающая симметрии задачи, может быть легко написана, если учесть, что базисные функции должны быть по α четны и периодичны с периодом, равным π, а также ортогональны с мерой (19). В результате получаем базис в виде

$$\Psi_{m,L,\mu,l,\nu}(\alpha, \vec{e}_{(12)3}, \vec{e}_{12}) = 2\left[\frac{4E^3}{\pi c(E)}\right]^{1/2} \cos m\alpha\, Y_L^{\mu}(\vec{e}_{(12)3})\, Y_l^{\nu}(\vec{e}_{12}), \qquad (20)$$

где m — целые четные числа, Y — сферические функции от направлений импульсов $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

Функции (20) удовлетворяют условию ортонормированности

$$\frac{c(E)}{4E^3}\int_0^{\pi/2} d\alpha \int d\Omega(\vec{e}_{(12)3})\, d\Omega(\vec{e}_{(12)})\, \Psi^*_{m',L',\mu',l',\nu'} \Psi_{m,L,\mu,l,\nu} =$$

$$= \delta_{m,m'}\, \delta_{L,L'}\, \delta_{\mu,\mu'}\, \delta_{l,l'}\, \delta_{\nu,\nu'}. \qquad (21)$$

С физической точки зрения функции (20) определяют состояния с заданными значениями l, L, ν, μ относительных орбитальных моментов и их проекций в подсистемах (12) и (12),3. Так как угол α при фиксированном E связан с полной энергией ε_{12} пары в ее с. ц. и., то в базисных состояниях (20) ε_{12} имеет неопределенное значение $m_1+m_2 \leqslant \varepsilon_{12} \leqslant E-m_3$, а квантовое число m отличает одно возможное распределение по ε_{12} от другого.

Разумеется, можно легко перейти от базиса (20) к аналогичному, но с определенными значениями полного момента и его проекции.

Приложение

Интегралы, входящие в выражения (17) и (18), могут быть взяты аналитически. Приведем результаты вычислений.

С помощью замены $\varepsilon_{12}^2 = x$ получаем

$$\int_{m_1+m_2}^{\varepsilon_{12}} \frac{\sqrt{|\lambda(\varepsilon_{12}^2, m_1^2, m_2^2)\, \lambda(E^2, \varepsilon_{12}^2, m_3^2)|}}{\varepsilon_{12}}\, d\varepsilon_{12} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\varepsilon_{12}^2} \frac{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}{x}\, dx, \qquad (22)$$

где

$$\alpha = (E+m_3)^2, \quad \beta = (E-m_3)^2, \quad \gamma = (m_1+m_2)^2, \quad \delta = (m_1-m_2)^2.$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (22), в принципе сводится к эллиптическим интегралам [17]. В результате после утомительных вычислений получаем

$$\int_{\gamma}^{\varepsilon_{12}^2} \frac{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}{x}\, dx =$$

$$= A\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^2}\{-\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + a\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,(1+n\sin^2\varphi) +$$

$$+ b(1-n\sin^2\varphi) - c\} + B\{K(k) - F(\varphi, k)\} + C\{E(k) - E(\varphi, k)\} +$$

$$+ D\left\{\Pi(n, k) - \Pi(\varphi, n, k) - d\ln\left|\frac{\sqrt{-(n+1)}\sin\varphi - \cos\varphi}{\sqrt{-(n+1)}\sin\varphi + \cos\varphi}\right|\right\} +$$

$$+ \mathcal{E}\left\{\Pi(n', k) - \Pi(\varphi, n', k) + e\ln\left|\frac{\sqrt{-(n'+1)}\sin\varphi - \cos\varphi}{\sqrt{-(n'+1)}\sin\varphi + \cos\varphi}\right|\right\}, \qquad (23)$$

где

$$A = \frac{(u-s)(u^2-s^2)}{4(l+m)},$$

$$B = \frac{\{(lm-p^2)r^2 - 2ml[(u+s)^2-(l-m)^2]\}(u-s)^2(l+m)}{8(lm+p^2)q^2(u+s)},$$

$$C=\frac{r^2(u+s)(l+m)}{8q^2},\qquad D=\frac{[8(l^2m^2-p^4)+4r^2p^2-q^4](u-s)^2}{8q^2(u+s)(l+m)},$$

$$\mathscr{E}=\frac{[(lm-p^2)^2-p^2(l-m)^2](lm-p^2)(u-s)^2}{q^2(lm+p^2)(u+s)(l+m)},$$

$$a=\frac{r^2}{2(u-s)^2},\qquad b=\frac{r^2-4ml}{2(u^2-s^2)},\qquad c=\frac{r^2-(u+s)^2}{u^2-s^2},\quad d=\frac{(u+s)(l+m)}{2(u-s)^2},$$

$$e=\frac{(u+s)(l+m)(lm+p^2)[(lm-p^2)^2+p^2(u+s)^2]^{1/2}}{2(u-s)^2(lm-p^2)[(lm-p^2)^2-p^2(l-m)^2]^{1/1}},$$

$$p^2=\alpha\beta-\gamma\delta,\quad q=(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta),\quad r^2=(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2,$$

$$l^2=(\alpha-\delta)(\beta-\delta),\; m^2=(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma),\quad u^2=(\alpha-\delta)(\alpha-\gamma),\quad s^2=(\beta-\gamma)(\beta-\delta),$$

$$k^2=\frac{4mlq^2}{(u+s)^2(l+m)^2},\quad n=-\frac{q^2}{(l+m)^2},$$

$$n'=-\frac{q^2(lm+p^2)^2}{(l+m)^2[(lm-p^2)^2+p^2(u+s)^2]},$$

$$\sin\varphi=\frac{(l+m)\sqrt{(\alpha-\varepsilon_{12}^2)(\beta-\varepsilon_{12}^2)}}{lm+p^2-q\varepsilon_{12}^2}.$$

Если теперь в этом выражении положить $\varepsilon_{12}^2=\beta$, то получим интеграл, входящий в формулу (18):

$$\int\limits_{\gamma}^{\beta}\frac{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}{x}\,dx=$$

$$=B\,K(k)+C\,E(k)+D\,\Pi(n,\,k)+\mathscr{E}\,\Pi(n',\,k). \tag{24}$$

Использованные обозначения всех трех типов эллиптических интегралов, как полных, так и неполных, заимствованы из [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Богословская Г. Ю. ТМФ, 8, 85, 1971.
2. Smith F. T. Phys. Rev., **120**, 1058, 1960.
3. Delves L. M. Nucl. Phys., **20**, 275, 1960.
4. Koba Z. Phys. Lett., **1**, 34, 1962; Acta Phys. Polon., **22**, 103, 1962.
5. Dragt A. J. J. Math. Phys., **6**, 533, 1965.
6. Горелик Р. Б., Клепиков Н. П., Юдин В. А. «Ядерная физика», **1**, 152, 1965.
7. Zickendraht W. Ann. of Phys., **35**, 18, 1965.
8. Levy-Leblond J. M., Levy-Nahas M. J. Math. Phys., **6**, 1571, 1965.
9. Симонов Ю. А. «Ядерная физика», **3**, 630, 1966.
10. Пустовалов В. В., Симонов Ю. А. ЖЭТФ, **51**, 345, 1966.
11. Нири Ю., Смородинский Я. А. «Ядерная физика», **9**, 882, 1969.
12. Nyiri J., Smorodinsky Ya. A. Prerint E2-4809, JINR, 1969.
13. Halpern F. R. Phys. Rev., **137**, B 1587, 1965.
14. Богословский Г. Ю., Клепиков Н. П. «Ядерная физика», **5**, 1126, 1967.
15. Wick G. C. Ann. of Phys., **18**, 65, 1962.
16. Macfarlane A. J. Rev. Mod. Phys., **34**, 41, 1962.
17. Тимофеев А. Ф. Интегрирование функций. М., 1948.
18. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
3.3 1971 г.

НИИЯФ