Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3—1972

УДК 531.19

П. Б. ПОДОСЕНОВ

О РЕЛЯТИВИСТСКОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ООРТА — ШВАРЦШИЛЬДА

Рассматривается ковариантное статистическое уравнение непрерывности для случая метрики равномерно вращающейся системы отсчета. Полученное решение этого уравнения при $c \to \infty$ или $r \to 0$ переходит в классическое эллипсоидальное распределение Оорта — Шварцшильда.

Открытие асимметрии звездных движений привело Каптейна [1] к заключению о существовании двух взаимно противоположных звездных потоков. Однако теория двух потоков совершенно неприемлема динамически, так как в звездной системе не могут существовать два взаимно противоположных движения по направлению к центру Галактики и от центра ее. Шварцшильд [2] предложил эллипсоидальную теорию, согласно которой вместо двух потоков существует лишь некоторое предпочтительное направление, вдоль которого движутся звезды с бóльшими скоростями и в большем количестве, чем в перпендикулярных направлениях. Шварцшильд предположил, что распределение скоростей звезд описывается эллипсоидальной функцией распределения $f(u_x, u_y, u_z)$:

$$f(u_x, u_y, u_z)\, du_x du_y du_z = f_0 e^{h^2 u_x^2 - k^2(u_y^2 + u_z^2)}\, du_x du_y du_z, \tag{1}$$

где h, k и f_0 — постоянные, u_x, u_y, u_z — компоненты скорости в декартовой системе координат.

Оорт [3] пришел к заключению, что наблюдаемая асимметрия звездных движений может быть объяснена вращательным движением звезд относительно галактического центра. Он определил постоянные галактического вращения и вывел формулы для определения вращения по относительным движениям самих звезд.

К. Ф. Огородников [4] показал, что эллипсоидальное распределение скоростей Шварцшильда является следствием галактического вращения. Причем характер вращения звездных систем является практически во всех случаях твердотельным, в пределах видимых границ галактик. На расстояниях, превышающих видимые размеры галактик, их вращение становится баротропным или нетвердотельным. Как известно из общей теории относительности, во вращающейся звездной системе пространство становится неевклидовым.

В связи с этим возникает вопрос, как влияет возникающая кривизна пространства на установление стационарного распределения звезд в галактике. В соответствии с вышесказанным представляет интерес исследовать решения общековариантного уравнения непрерывности, взятого из работы [5], для случая равномерно вращающейся системы отсчета.

Метрика равномерно вращающейся системы отсчета (в цилиндрических координатах r, φ, z) имеет вид

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2 r^2)\, dt^2 - 2\omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2. \tag{2}$$

Следуя А. Л. Зельманову [6, 7], введем хронометрически-инвариантные компоненты метрического тензора

$$h_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}}, \; h_{11} = -1, \; h^{11} = 1,$$

$$h_{22} = \frac{r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}, \; h^{22} = \frac{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}{r^2}, \; h_{33} = 1, \; h^{33} = 1.$$

Латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3.

Хронометрически-инвариантные символы Кристоффеля будут

$$\Delta_{12}^2 = \frac{1}{r\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)}, \; \Delta_{22}^1 = -\frac{r}{\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^2}.$$

Подставляем эти выражения в общековариантное уравнение непрерывности

$$\widetilde{\mathrm{Div}}_r uf + \mathrm{div}_u \left\langle \frac{\widetilde{D}u}{d\tau} \right\rangle f = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} \widetilde{\mathrm{Div}}_r uf = u^i \frac{\partial f}{\partial x^0} - \Gamma^i_{lm} u^l u^m \frac{\partial f}{\partial u^i}, \; \left\langle \frac{\widetilde{D}u}{d\tau} \right\rangle = -\frac{1}{m} \mathrm{grad}_r V, \\ \frac{\partial f}{\partial x^0} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{r\varphi} = 0 \end{array} \right), \tag{3}$$

где ковариантные производные $\widetilde{\mathrm{Div}}_r uf$, $\left\langle \frac{\widetilde{D}u}{d\tau} \right\rangle$ берутся по правилам дифференцирования Картана, U — осесимметричная потенциальная функция.

Окончательно получаем следующее уравнение:

$$u_r \frac{\partial f}{\partial r} + u_z \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{u_r u_\varphi}{r} \left(\frac{1 + \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \right) \frac{\partial f}{\partial u_\varphi} + \frac{u_\varphi^2}{r\left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)} \frac{\partial f}{\partial u_r} -$$

$$- \frac{1}{m} \left\{ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial u_r} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial u_z} \right\} = 0. \tag{4}$$

Здесь $u_r = \frac{dr}{d\tau}$, $u_\varphi = r \frac{d\varphi}{d\tau}$, $u_z = \frac{dz}{d\tau}$ — хронометрически-инвариантные компоненты вектора скорости.

Будем искать решение этого уравнения в таком виде:

$$f = \rho(r, z)\, w(u_r^2)\, w(u_z^2)\, \Phi[\varphi_1(r) u_\varphi^2]\, L[\varphi_2(r) u_\varphi]. \qquad (5)$$

При подстановке (5) в уравнение (4) функции ρ, φ_1, φ_2, w и Φ определяются методом разделения переменных.

Для нахождения функции L наложим на решение (5) следующие условия:

$L(0) = 1$, так как при $\varphi_2(r) u_\varphi = 0$ должно быть изотропное распределение в пространстве скоростей, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f du_\varphi < \infty$ — условие нормировки функции распределения,

$f > 0$ — отказ от вакуума.

Всем этим условиям можно удовлетворить, если функцию L выбрать в виде

$$L = e^{\frac{m\Omega}{\theta} \frac{r u_\varphi}{\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)}},$$

где Ω — постоянная интегрирования.

Окончательно получаем следующее решение уравнения (4):

$$f = f_0 e^{-\frac{v}{\theta}} e^{-\frac{m u_r^2}{2\theta}} e^{-\frac{m u_z^2}{2\theta}} \exp\left\{-\frac{m}{2\theta} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[u_\varphi - \Omega r\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\right]^2 + \frac{m\Omega^2 r^2}{2\theta}\right\}. \qquad (6)$$

Здесь f_0 — нормировочная постоянная.

Из полученного решения видна анизотропия в распределении скоростей звезд в Галактике. Эта анизотропия проявляется в том, что хотя на малых расстояниях ($r \to 0$) от оси вращения имеет место твердотельное вращение, так как линейная скорость вращения:

$$\bar{u}_\varphi = \Omega r\left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\right) \to \omega r,$$

на больших расстояниях $r \to \frac{c}{\omega}$, $\bar{u}_\varphi \to 0$ и эффект вращения исчезает. Кроме того, это распределение таково:

$$\frac{m}{2\theta} \to \frac{m}{2\theta} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^2} \text{ (как бы «вторая температура»).}$$

Это указывает на то, что разброс скоростей вдоль параллелей имеет дисперсию, отличную от дисперсии по другим осям координат.

При $c \to \infty$ или $r \to 0$ функция распределения (6) переходит в классическую эллипсоидальную функцию распределения. Разлагая в ряд по малому параметру $\frac{1}{c}$ показатели экспонент в формуле (6)

$$\frac{r}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} = 0 + r, \quad \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)} = 1 + \frac{2\omega^2 r^2}{c^2},$$

получим

$$f = f_0 e^{-\frac{v}{\theta}} e^{-\frac{mu_r^2}{2\theta}} e^{-\frac{mu_z^2}{2\theta}} e^{\frac{m\omega r}{\theta} u_\varphi} e^{-\frac{mu_\varphi^2}{2\theta}} e^{-\frac{m}{\theta}\frac{\Omega^2}{c^2} r^2 u_\varphi^2}.$$

Перепишем эту формулу так:

$$f = f_0 e^{-\frac{v}{\theta}} e^{-\frac{mu_r^2}{2\theta}} e^{-\frac{mu_z^2}{2\theta}} \exp\left\{-\left(\frac{m}{2\theta} + \frac{m}{\theta}\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(u_\varphi - \frac{m}{2\theta} \frac{\Omega r}{\frac{m}{2\theta} + \frac{m}{\theta}\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{2\theta}\right)^2 \frac{\omega^2 r^2}{\frac{m}{2\theta} + \frac{m}{\theta}\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}\right\}.$$

Обозначая $A = \frac{m}{\theta}\frac{\omega^2}{c^2}$, получим формулу, в точности совпадающую с классической формулой из работы (5).

Итак, можно сделать некоторые выводы.

Наличие кривизны пространства, связанной с твердотельным вращением звездной системы, приводит к анизотропии в распределении скоростей звезд в галактике и к дисперсии скоростей вдоль параллелей, отличающейся от дисперсии по другим осям координат. Если бы звездные системы не вращались ($\omega = 0$), то все отличные от нуля компоненты тензора кривизны трехмерного пространства

$$P^1_{221} = -P^1_{212} = \frac{3\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^3} \quad \text{и} \quad P^2_{121} = -P^2_{112} = -\frac{3\frac{\omega^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^2}$$

обратились бы в нуль, и пространство стало бы плоским. Как видно из формулы (6), в плоском пространстве мы имеем изотропное максвеллово распределение скоростей звезд.

При переходе к пределу $c \to \infty$ или $r \to 0$ функция распределения (6) переходит в классическую эллипсоидальную функцию распределения.

В заключение выражаю искреннюю благодарность проф. А. А. Власову за представление темы и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kapteyn J. C. Adress before St. Louis Exposition Congress, 1904.
2. Schwarschild K. Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 614, 1907.
3. Oort J. H. Bull. Astron. Netherl. è, No. 120, 275, 1927.
4. Огородников К. Ф. «Успехи астроном. наук», **4**, вып. 3, 1948.
5. Власов А. А. «Статистические функции распределения». М., 1966.
6. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **107**, № 6, 815, 1956.
7. Зельманов А. Л. Труды шестого совещания по вопросам космологии, 1959.

Поступила в редакцию
8.4 1971 г.

Кафедра
теоретической физики